Элементы теории устойчивости.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Основные определения

Рассмотрим набор дифференциальных уравнений, где y_i вещественные переменные, зависящие от времени (t).

Функции f_i известные функции от переменных $y_1, \ldots\ldots y_n$

Определение: если $f_1, \ldots\ldots f_n$ Если явно не зависят от времени, то система уравнений называется автономной, если зависят, то система называется не автономной.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, t) \end{cases}$$

Любое дифференциальное уравнение n-го порядка разрешенное относительно старшей производной можно преобразовать к системе дифференциальных уравнений. Вопрос: как сделать это преобразование?

Основные определения

Предположим у нас есть решение системы уравнений в виде:

$$y_1 = \varphi_1(\mathrm{t}), y_2 = \varphi_2(\mathrm{t}), \ldots\ldots y_n = \varphi_n(\mathrm{t})$$

Это решение удовлетворяет начальным условиям, в момент времени t_0

$$y_1 = \varphi_1(\mathrm{t}_0), y_2 = \varphi_2(\mathrm{t}_0), \ldots\ldots y_n = \varphi_n(\mathrm{t}_0)$$

Назовем это решение не возмущенным и рассмотрим возмущенное решение.

Рассмотрим приращение $y_{1,.}$ y_n на небольшие по модулю величины $\varepsilon_{1,}$ .... ε_n

то есть: $$y_1 = \varphi_1(\mathrm{t}) + \varepsilon_1, y_2 = \varphi_2(\mathrm{t}) + \varepsilon_2, \ldots\ldots y_n = \varphi_n(\mathrm{t}) + \varepsilon_n$$

Движение, отвечающее измененным начальным состояниям называется возмущенным движением, а величины $\varepsilon_{1,}$ .... ε_n – возмущениями.

Обозначим возмущенное состояние системы следующим образом:

$$\bar{y}_1 = \varphi_1(\mathrm{t}) + \varepsilon_1, \bar{y}_2 = \varphi_2(\mathrm{t}) + \varepsilon_2, \ldots\ldots \bar{y}_n = \varphi_n(\mathrm{t}) + \varepsilon_n$$

Основные определения

Составим разницу между возмущенным и невозмущенным состояниями:

$$x_1 = \bar{y}_1 - \varphi_1(\mathrm{t}), \mathrm{x}_2 = \bar{y}_2 - \varphi_2(\mathrm{t}), \ldots . \mathrm{x}_n = \bar{y}_n - \varphi_n(\mathrm{t})$$

Переменные x_i называются отклонениями или вариациями.

Совокупность отклонений x_i в n-мерном пространстве определяет точку М, которая называется изображающей точкой.

Мерой отклонения возмущенного от невозмущенного движения является суммой квадратов.

$$x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 + \ldots .. x^2{}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Соответственно: $t = t_0, x_1 = \varepsilon_1 \ldots \ldots . x_n = \varepsilon_n$

Определение устойчивости по Ляпунову

Определение: **Если по любому положительному числу ε можно найти такое положительное число δ при всяких x_j, что при всяких возмущениях справедливо неравенство**:

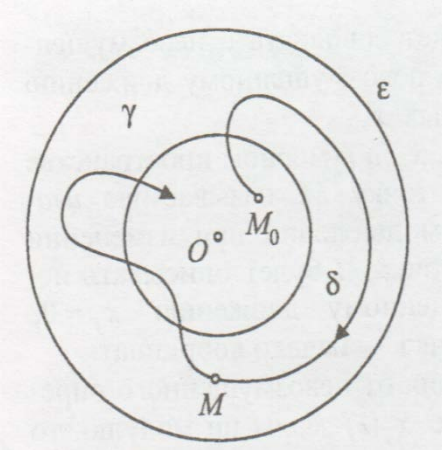
$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \delta$$

и при любом t>0 справедливо неравенство: $$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < \varepsilon$$

то такое невозмущенное движение устойчиво, в противном случае не устойчиво.

Геометрическая интерпретация:

Невозмущенное движение устойчиво если точка $\mathbf{M_0}$ (изображающая точка) стартовав из любой позиции внутри сферы **ε** с течением времени попадет внутрь сферы **δ.** И на оборот, невозмущенное движение не устойчиво, если точка $\mathbf{M_0}$ выйдет за пределы сферы **ε** с течением времени.



называется рядом Тейлора функции f в точке a

Вспомогательные понятия

Ряд Тейлора: — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряд назван в честь английского математика Брука Тейлора.

Пусть функция f(x) бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки (a), тогда ряд:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{k}(a)}{k!} \cdot (x-a)^{k}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке a.

В случае, если a=0, этот ряд иногда называется рядом **Маклорена**.
Если f есть аналитическая функция, то её ряд Тейлора в любой точке (a) области определения f сходится к f в некоторой окрестности (a).

Формула Тейлора используется при доказательстве большого числа теорем в дифференциальном исчислении. В общем, формула Тейлора показывает поведение функции в окрестности некоторой точки.

Уравнения возмущенного движения

Выразим возмущенное движение в терминах устойчивого движения + возмущение.

$$\bar{y}_1 = \varphi_1(\mathrm{t}) + x_1, \bar{y}_2 = \varphi_2(\mathrm{t}) + \mathrm{x}_2, \ldots. \bar{y}_n = \varphi_n(\mathrm{t}) + \mathrm{x}_n$$

Подставим это решение в систему исходных уравнений:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = f_i(\varphi_1 + \mathrm{x}_1, \varphi_2 + \mathrm{x}_2 \ldots\ldots \varphi_n + \mathrm{x}_n)$$

Разложим правую часть уравнений в ряд Тейлора (по степеням x).

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_n) +$$

$$\left(\frac{df_i}{dx_1}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0} \cdot x_1^{\ 1} + \ldots\ldots\ldots \left(\frac{df_i}{dx_n}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0} \cdot x_n^{\ 1} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{df_i}{dx_1}\right)^n_{x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0} \cdot x_1^{\ n} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n!}\left(\frac{df_i}{dx_n}\right)^n_{x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0} \cdot x_n^{\ n}$$

Уравнения возмущенного движения первого порядка

Так как набор функций ϕ_i удовлетворяют набору исходных уравнений, в последнем уравнении остаются члены с производными по вариациям.

Если в последнем уравнении отбросить все члены содержащие отклонения выше первой степени, то такие уравнения называются **уравнениями первого приближения**.

Если сделать следующие переобозначения: $a_{jk} = \left(\frac{df_j}{dx_k}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0}$

То уравнения первого приближения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots a_{in}x_n$$

Основные теоремы об устойчивости По первому приближению

Предполагаем, что все коэффициенты a_i - const. Тогда в матричной форме у нас на будет уравнение:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение: **det(A- λI)=0**

Теорема Ляпунова об устойчивом движении по первому приближению. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Основные теоремы об устойчивости По первому приближению

Теорема Ляпунова об неустойчивом движении по первому приближению.
Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Линейные системы второго порядка

1. λ_1 и λ_2 - действительные различные отрицательные числа, то точка равновесия асимптотически устойчива и называется устойчивым узлом.
2. λ_1 и λ_2 - действительные различные положительные числа, то точка равновесия неустойчива и называется неустойчивым узлом.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Линейные системы второго порядка

3. λ_1и λ_2 - комплексные числа, λ_{12} =a±bi,
a=0, точка устойчива, но не асимптотически.
a<0, точка асимптотически устойчива, называется устойчивый фокус.
a>0, точка неустойчива и называется неустойчивый фокус.

4. $\lambda_1 = \lambda_2$ - диакритический узел, $\lambda<0$ - устойчивый узел,
$\lambda>0$ - неустойчивый узел.

Фазовый портрет - совокупность фазовых траекторий, характеризующая состояния и движения динамической системы.

Асимптотическая устойчивость движения это движение, при котором при достаточно малых возмущениях, возмущенное движение стремится к невозмущенному движению с течением времени.

Исследование устойчивости в экономических моделях

Модель установления равновесной цены

Цена товара является функцией от времени *p = p(t), t ≥ 0 .*

Предложение является функцией от цены товара в момент времени *t и определяется формулой:*

$$S = S(t) = S(p(t)) = a + bp,$$

Спрос является функцией от цены товара в момент времени *t и* определяется формулой:

$$D = D(t) = D(p(t)) = c - dp$$

Предположение: изменение цены на товар пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\frac{dp}{dt} = a(\mathrm{D(p)} - \mathrm{S(p)}), \mathrm{a} > 0$$

Модель установления равновесной цены с точки зрения устойчивости

Характер изменения цены определяется следующим уравнением:

$$\frac{dp}{dt} = a(\mathrm{D(p)} - \mathrm{S(p)}), \mathrm{a} > 0$$

Алгоритм решения:

1. Решаем однородное уравнение.
2. Решаем неоднородное уравнение на основе решения однородного уравнения.

Уравнения изменения цены: $p' + a(\mathrm{b+d})\,\mathrm{p} = \mathrm{a(a-c)}$

Решение: Характеристическое уравнение **λ+a(b+d)=0**, корень **λ=-a(b+d)**

Решение однородного уравнения: $p = C \cdot e^{-a(\mathrm{b+d})\mathrm{t}}$

Частное решение неоднородного уравнения: $p_{частн} = \dfrac{a-c}{b+d}$

Модель установления равновесной цены.

Общее решение уравнения: $$p(\mathrm{t}) = C \cdot e^{-a(\mathrm{b}+\mathrm{d})\mathrm{t}} + \frac{a-c}{b+d}$$

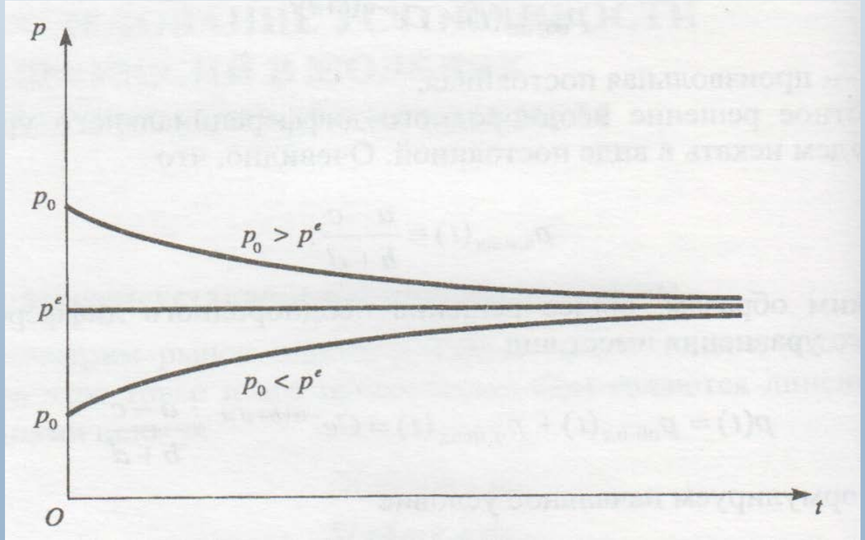
Пусть $p(0) = P_0$

Соответственно $$p(0) = P_0 = C + \frac{a-c}{b+d} \Rightarrow C = P_0 - \frac{a-c}{b+d}$$

Итоговое решение уравнения: $$p(\mathrm{t}) = \frac{a-c}{b+d}\left(1 - e^{-a(\mathrm{b}+\mathrm{d})\mathrm{t}}\right) + \mathrm{P}_0\, e^{-a(\mathrm{b}+\mathrm{d})\mathrm{t}}$$

$$p(t) = \frac{a-c}{b+d}$$

$$p \to \infty$$



INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!