INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Метод вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \ldots\ldots a_0 \cdot y^0 = f(\mathrm{x})$$

Предположим, что у нас есть фундаментальный набор решений y_1, y_2,y_3, ..y_n для однородного уравнения.

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \ldots\ldots a_0 \cdot y^0 = 0$$

Фундаментальной системой решений однородного линейного дифференциального уравнения называется упорядоченный набор из *n* линейно независимых решений уравнения.

Тогда решение неоднородного уравнения можно искать в следующем виде:

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1(\mathrm{x}) \cdot y_1(\mathrm{x}) + \ldots \mathrm{C}_n(\mathrm{x}) \cdot y_n$$

где C_1, C_2,C_3, ..C_n неизвестные n раз дифференцируемые функции на промежутке [a, b]. Эти функции называют *варьируемые постоянные* общего решения однородного уравнения

Метод вариации произвольных постоянных.

Неизвестные функции C_1, C_2,C_3, ..C_n можно найти из следующего набора уравнений. Подставим решение с неизвестными функциями $C_i(x)$ в исходное уравнение. Сгруппируем все члены с одинаковым порядком производной вместе. В итоге получим следующий набор уравнений.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n'(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1''(x) + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n''(x) = 0 \\ \ldots. \\ C_1'(x)\cdot y^{n-1}_1(x) + \ldots + C_n'(x)\cdot y^{n-1}_n(x) = f \end{cases}$$

Такой метод отыскания частного решения неоднородного уравнения называется *методом* ***вариации произвольных постоянных***

Метод вариации произвольных постоянных.

Пример: $y' + 2\cdot x\cdot y = x\cdot e^{-x^2}$

На первом этапе будем решать однородной уравнение: $y' + 2\cdot x\cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2\cdot x\cdot y \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = -2\int xdx \Rightarrow \quad \ln(y) = -2\,x^2 + c$$

Соответственно решение однородного уравнения будет следующим: $y = e^{-x^2+c}$

Тогда решение не однородного уравнения можно записать таким образом: $y = u(x)\cdot e^{-x^2}$

Подставим последнее решение в исходное нелинейное уравнение

Метод вариации произвольных постоянных.

По правилу дифференцирования:

$$y' = (\mathrm{u}e^{-x^2})' = (\mathrm{u})' \cdot e^{-x^2} + u \cdot (\mathrm{e}^{-x^2})' = u' \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2}$$

В итоге получим следующее выражение:

$$u' \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2} + 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad u' \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

Итоговое решение будет следующим:

$$u = x^2/2 + C \Rightarrow \qquad y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2 \cdot e^{-x^2}}{2}$$

Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Система уравнений вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j + f_i(\mathrm{t})$$

называется ***неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами***. Будем считать, f(t) являются непрерывными функциями на [a, b].

Система дифференциальных уравнений называется однородной системой:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j$$

Введем набор векторов $x = x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}), ...x_m(\mathrm{t})$ $f = f_1(\mathrm{t}), \mathrm{f}_2(\mathrm{t}), ...\mathrm{f}_m(\mathrm{t})$

Система дифференциальных уравнений будет: $\frac{dx}{dt} = A \cdot x + f$

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Матрица Вронского.

Матрица X: $\begin{pmatrix} x_{11} & . & . & x_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & . & . & x_{nn} \end{pmatrix}$ векторного уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A \cdot x$

называется фундаментальной матрицей этого уравнения или **матрицей Вронского.**

Определитель матрицы $W = \begin{pmatrix} x_{11}(\mathrm{t}) & . & . & x_{1n}(\mathrm{t}) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{n1}(\mathrm{t}) & . & . & x_{nn}(\mathrm{t}) \end{pmatrix}$ составленный из частных решений системы

называется ***определителем Вронского***

X - координаты линейно независимых решений (векторов).

Если частные решения x_{ij} линейно зависимы то определитель Вронского равен нулю на отрезке [a,b]. Обратное утверждение не верно.

Решение системы однородных уравнений.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j$$

Можно искать в следующем виде: $x(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x(\mathrm{t})_j$

Соответственно $x_1(\mathrm{t}),..x_m(\mathrm{t})$ является фундаментальной системой решений.

Подставим фундаментальное решение в исходное уравнение, предполагая при этом, что функции C_i являются неизвестными, но непрерывными.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j + f_i(\mathrm{t})$$

Получим матричное равенство.

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i \cdot x(\mathrm{t})_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x'(\mathrm{t})_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot Ax(\mathrm{t})_i + f(\mathrm{t})$$

Решение системы однородных уравнений.

Так как $x(\mathrm{t})_i = Ax_i$ то последнее равнение можно записать в следующем виде.

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i \cdot x(\mathrm{t})_i = f(\mathrm{t})$$

Пример: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$ Эта система в матричной форме будет следующей:

$$X(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} x(\mathrm{t}) \\ y(\mathrm{t}) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{f}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} o \\ \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow X'(\mathrm{t}) = \mathrm{AX}(\mathrm{t}) + \mathrm{f}(\mathrm{t})$$

Решаем однородную систему,
Для этого определяем
Собственные значения

$$(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1;$$

Решение системы однородных уравнений.

Определяем собственные вектора на основе собственных значений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I)X_1 = 0 \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = 0$$

В итоге получим следующие значения для первого собственного вектора

$$\begin{cases} -3x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ -3x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_{11} = 2 \\ x_{21} = 3 \end{matrix}$$

По аналогии определяем компоненты второго вектора (λ_2=1)

$$\begin{cases} -2x_{21} + 2x_{22} = 0 \\ -3x_{21} + 3x_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение системы однородных уравнений.

Таким образом, решение однородного уравнения будет:

$$X_0 = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot X_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot X_2 = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

запись в виде уравнений

$$\begin{cases} x(\mathrm{t}) = 2C_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{t} \\ y(\mathrm{t}) = 3C_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

Теперь можно решить не однородное уравнения, помня ,что функции C_i зависят от t. Подставим решения в исходное не однородное уравнение.

$$\begin{cases} 2C_1^{'} \cdot e^{2t} + 2C_2^{'} \cdot e^{t} = 0 \\ 3C_1^{'} \cdot e^{2t} + 2C_2^{'} \cdot e^{t} = \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = artctg(\mathrm{e}^{t}) + \mu_1 \\ C_2 = -\ln(\mathrm{e}^{t} + 1) + \mu_2 \end{cases}$$

Траектории линейных систем на плоскости.

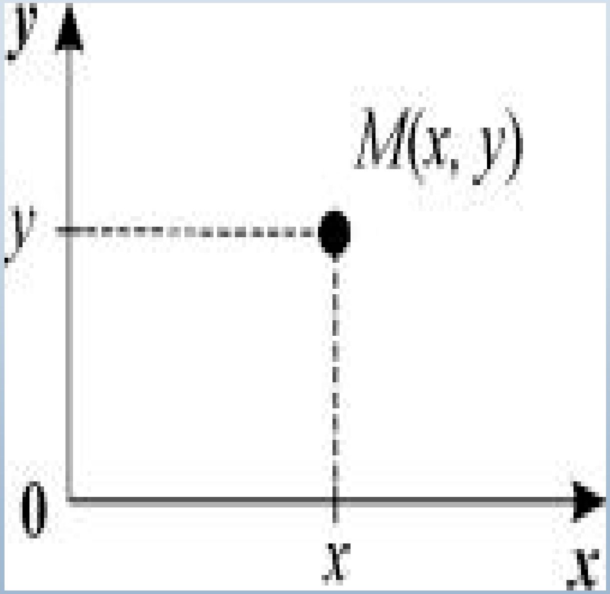
Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Переменные *x*, *y* во времени изменяются в соответствии с системой уравнений, так что каждому состоянию системы соответствует пара значений переменных (*x*, *y*).

Точка M(x,y) называется изображающей или представляющей точкой. Плоскость xy называется фазовой плоскостью.

Совокупность точек $M(x(t), y(t))$ на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных $x(t)$, $y(t)$ согласно уравнениям (4.1), называется *фазовой траекторией.*



Траектории линейных систем на плоскости.

Если ad-bc ≠0 тогда поведение системы (фазовые траектории) будут зависеть от собственных чисел.

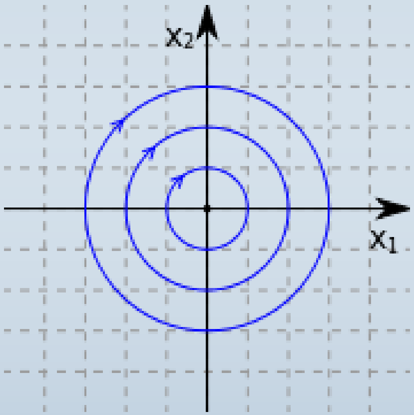
$$A = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (\mathrm{a}+\mathrm{d})\lambda + \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 0$$

Корни характеристического Уравнения – мнимые числа

$$\lambda = \pm i\beta$$

Окружности, эллипсы

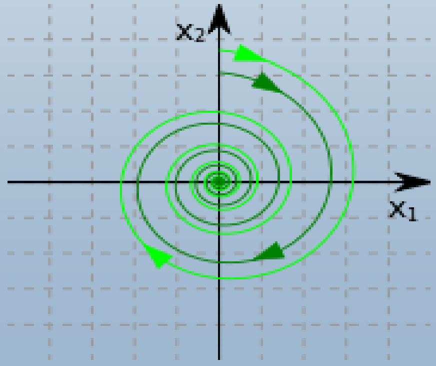


Корни характеристического Уравнения – мнимые числа,

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha < 0$$

Устойчивый Фокус, Логарифмические спирали



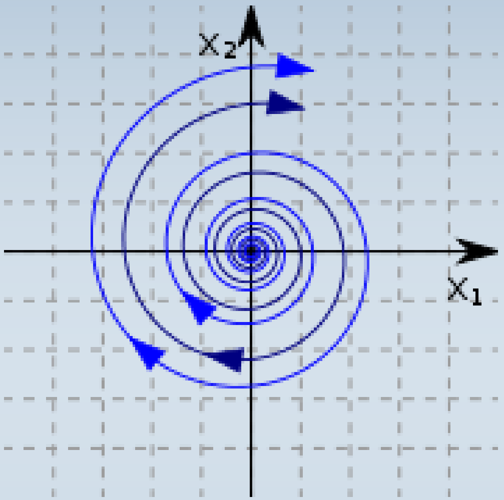
Траектории линейных систем на плоскости.

Корни характеристического
Уравнения – мнимые числа,

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha > 0$$

Неустойчивый
Фокус,
Логарифмические
спирали



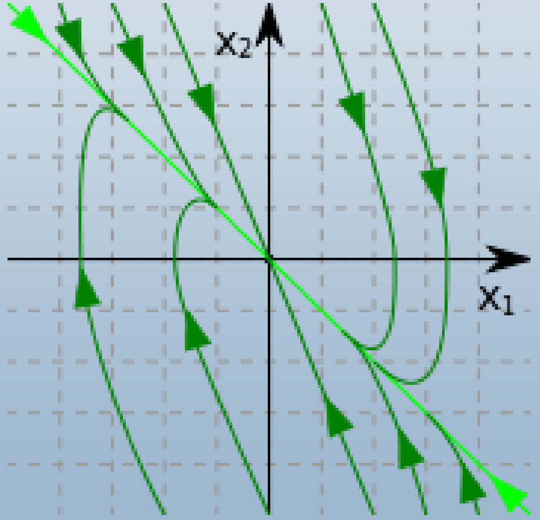
Действительные числа
и отрицательные числа

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

Устойчивый
Фокус, параболы

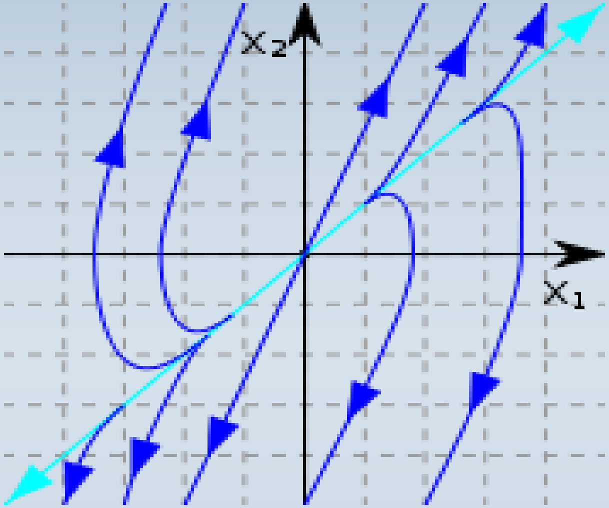


Траектории линейных систем на плоскости.

Действительные числа
и положительные числа

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$\lambda_1 > 0$$
$$\lambda_2 > 0$$

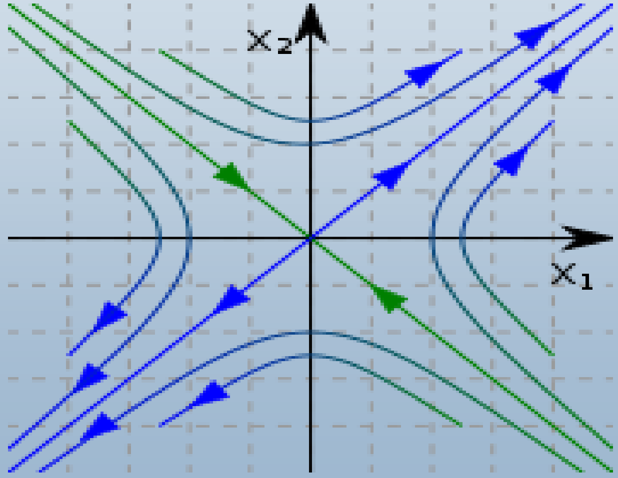
Неустойчивый узел,
параболы



Действительные и
разных знаков

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$\lambda_1 > 0$$
$$\lambda_2 < 0$$

Седло,
гиперболы



Модель динамики долга.

D – величина бюджетного дефицита

d – величина долга

a – параметр, который характеризует
Скорость прироста ВВП.

Величина долга это накопление бюджетного дефицита

$$\begin{cases} D' = d \\ d' = aD \end{cases}$$

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ВШЭ № 2 2000 157

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Модель динамики государственного долга России

Смирнов А.Д.

Модель динамики долга.

Характеристическое уравнение будет следующим:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$$

Если экономика растет a>0 тогда собственные числа действительные.

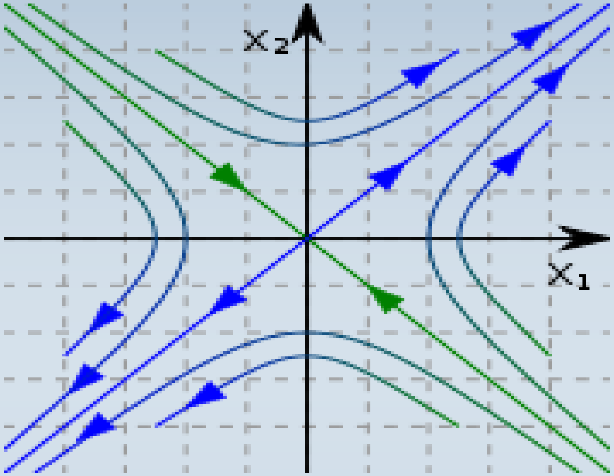
Общее решение системы будет следующим:

$$D(\mathrm{t}) = \frac{(\mathrm{D}_0 + \frac{d_0}{\sqrt{a}})}{2} \cdot e^{t\cdot\sqrt{a}} + \frac{(\mathrm{D}_0 - \frac{d_0}{\sqrt{a}})}{2} \cdot e^{-t\cdot\sqrt{a}}$$

$$d(\mathrm{t}) = \frac{(\mathrm{D}_0 \cdot \sqrt{a} + d_0)}{2} \cdot e^{t\cdot\sqrt{a}} - \frac{(\mathrm{D}_0 \cdot \sqrt{a} - d_0)}{2} \cdot e^{-t\cdot\sqrt{a}}$$

Модель динамики долга.

Точкой равновесия является седло.



Прямые линии описываются выражениями

$$d(\mathrm{t}) = \pm D \cdot \sqrt{a}$$

Исходные уравнения на этих прямых будут:

$$\begin{cases} D'(\mathrm{t}) = D \cdot \sqrt{a} \\ d'(\mathrm{t}) = d \cdot \sqrt{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(\mathrm{t}) = \mathrm{D}_0\, e^{t \cdot \sqrt{a}} \\ d(\mathrm{t}) = \mathrm{d}_0\, e^{t \cdot \sqrt{a}} \end{cases}$$

Таким образом, на прямой $d(\mathrm{t}) = D \cdot \sqrt{a}$

движение происходит от начала координат.

Модель динамики долга.

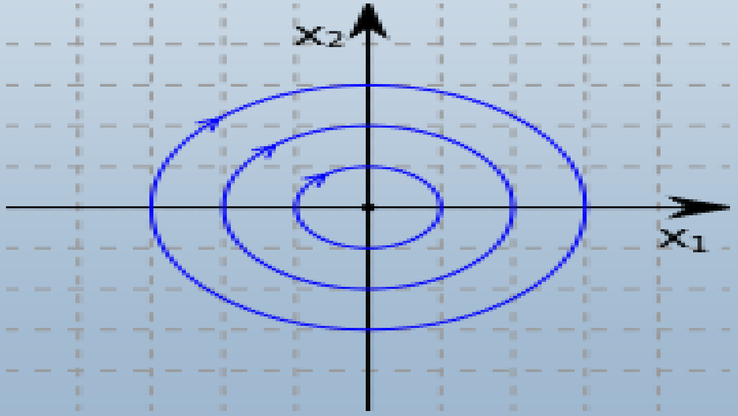
Если экономика падает a<0 тогда собственные числа мнимые.

Тогда общее решение будет следующим:

$$\mathrm{D(t)} = D_0 \cos(\mathrm{t}\cdot\sqrt{-a}) + \frac{d_0}{\sqrt{-a}} \sin(\mathrm{t}\cdot\sqrt{-a})$$

$$\mathrm{d(t)} = -\mathrm{D}_0 \sin(\mathrm{t}\cdot\sqrt{-a}) + \mathrm{d}_0 \cos(\mathrm{t}\cdot\sqrt{-a})$$

Фазовые траектории представляют
Собой эллипсы.



LINIS INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!