INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Системы дифференциальных уравнений.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Основные понятия и определения.

Нормальные системы

Определение 1. Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), i = \overline{1, n}$$

где y_i, – неизвестные функции от независимой переменной *x*, подлежащие определению; f_i, – известные функции от x, заданные и **непрерывные** в некоторой области. **Число *n* называется порядком системы**

Например. n=2, система второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Непрерывность функции

Определение непрерывности по Коши

Рассмотрим функцию f(x), которая отображает множество действительных чисел R на другое подмножество B действительных чисел. Говорят, что функция f(x) является непрерывной в точке aϵR, если для любого хчсла ε>0 существует число σ, такое, что для всех xϵR, удовлетворяющих соотношению: $|x-a|<\sigma,$

выполняется неравенство: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Определение непрерывности в терминах приращений аргумента и функции

Определение непрерывности можно также сформулировать, используя приращения аргумента и функции. Функция является непрерывной в точке *x* = *a*, если справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(\mathrm{a}+\Delta \mathrm{x}) - f(\mathrm{a}) \right) = 0$$

где $\Delta x = x - a$

Определитель (детерминант матрицы)

Определитель (детерминант) матрицы - это многочлен от элементов исходной матрицы.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_j^k$$

где M_j^k дополнительный минор к элементу a_{kj}

Детерминант матрицы 2x2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Детерминант матрицы 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть у нас есть матрица А и вектор Х

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & ...... & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix}$$

Если мы можем представить матрицу А в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & ...... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ненулевой вектор Х называется собственным вектором оператора А, если оператор А переводит Х в коллинеарный ему вектор, то есть АХ= λХ. Число λ называется собственным значением или собственным числом оператора А, соответствующим собственному вектору Х.

Свойства собственных чисел и собственных векторов.

1. Любая линейная комбинация собственных векторов X_1, X_2,.. X_m оператора А, отвечающих одному и тому же собственному числу λ, является собственным вектором с тем же собственным числом.

2. Собственные векторы X_1, X_2,.. X_m оператора А с попарно различными собственными числами λ_1, λ_2, …, λ_m линейно независимы.

3. Если собственные числа $\lambda_1=\lambda_2= \lambda_m= \lambda$, то собственному числу λ соответствует не более m линейно независимых собственных векторов.

Итак, если имеется n линейно независимых собственных X_1, X_2,.. X_n векторов , соответствующих различным собственным числам λ_1, λ_2, …, λ_n, то они линейно независимы, следовательно, их можно принять за базис пространства.

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX - \lambda X = 0 \Rightarrow X(\mathrm{A} - \lambda E)$$

где E – единичная матрица

Решение системы уравнений методом Эйлера.

Пусть у нас есть система уравнений, где y=y(x), z=z(x):

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - константы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases}$$

Согласно методу Эйлера, решение системы ищется в виде:
Где λ – собственное значение

$$y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$$

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 e^{\lambda x} = a_{11}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{12}\alpha_2 e^{\lambda x} \\ \lambda \alpha_2 e^{\lambda x} = a_{21}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{22}\alpha_2 e^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Так как a_{11}, a_{12},.. λ некоторые постоянные числа, подлежащие определению, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, то определитель системы должен быть равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

Уравнение называется характеристическим уравнением, а его корни – характеристическими числами системы.

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение указанного вида.

$$y(x)=\alpha_1 e^{\lambda x}, z(x)=\alpha_2 e^{\lambda x}$$

1. Оба корня характеристического уравнения вещественны и различны: $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Подставим оба корня в уравнения: $\Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$$(a_{11}-\lambda_1)\alpha_1^1 + a_{12}\alpha_2^1 = 0. \Rightarrow y_1(x)=\alpha_1^1 e^{\lambda_1 x}, z_1(x)=\alpha_2^1 e^{\lambda_1 x}$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_2)\alpha_2 = 0 \Rightarrow y_2(x)=\alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}, z_2(x)=\alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

Итоговое решение будет суммой частных решений

$$y(x)=c_1\alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} + c_2\alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}$$

$$z(x)=c_1\alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} + c_2\alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

2. Если $\lambda_1 = a + ib$ - корень характеристического уравнения, то $\lambda_2 = a - ib$

Первое решение системы

$$y_1(x) = \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} = \alpha_1^1 e^{(a+ib)x} = \alpha_1^1 e^{ax} \cdot e^{ibx} = \alpha_1^1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = \tilde{y}_1(x) + i \cdot \tilde{y}_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1(x) = \alpha_2^1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = \tilde{z}_1(x) + i \cdot \tilde{z}_2(x)$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим два вещественных линейно независимых частных решения системы, соответствующих корню *a+ib*

Решения, соответствующие корню *a-ib*, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню *a+ib.*

Итоговое решение системы будет:

$$y(x) = c_1 \cdot \tilde{y}_1(x) + c_2 \cdot \tilde{y}_2(x)$$
$$z(x) = c_1 \cdot \tilde{z}_1(x) + c_2 \cdot \tilde{z}_2(x)$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

3. Кратные корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

В случае кратного корня характеристического уравнения общее решение системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$y(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x), z(x) = e^{\lambda x}(a_1 + a_2 x)$$

c_1, c_2, a_1, a_2 - постоянные числа, причем a_1 и a_2 должны быть выражены через c_1 и c_2 (или наоборот).

Пример $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$ Ищем решение в виде $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$

Характеристическое уравнение будет: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x), z(x) = e^{2x}(a_1 + a_2 x) \Rightarrow c_1 + c_2 x + c_2 = -(a_1 + a_2 x)$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

$$z(x) = -e^{2x}((c_1 + c_2) + c_2 x),$$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

Системы дифференциальных уравнений можно решать не только методом исключения, неизвестных в котором система сводится к уравнению более высокого порядка, но и подбирая такие комбинации уравнений, которые легко могут быть проинтегрированы.
Если удается найти *n независимых первых ин*тегралов, то они определяют решение системы.

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(\mathrm{t}, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \ldots \mathrm{x}_n)$$

$$\mathrm{k} = 1 \ldots \mathrm{m}$$

Решение системы состоит в следующем: с помощью арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) из уравнений системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. достаточно просто решаемые уравнения вида:

$F(\mathrm{u}, \mathrm{t}, \frac{du}{dt}) = 0$ где u функция зависящая от $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \ldots \mathrm{x}_n$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

Для нахождения первых интегралов иногда удобно записать исходную систему в т.н. *симметричной форме*:

$$\frac{dx_1}{f_1(\mathrm{x}_1,\dots\mathrm{x}_n)} = \frac{dx_2}{f_2(\mathrm{x}_1,\dots\mathrm{x}_n)} = \dots\dots\frac{dx_n}{f_n(\mathrm{x}_1,\dots\mathrm{x}_n)} = dt$$

Интегрирование уравнений в такой форме достаточно просто

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\cdot dx = dt \\ x\cdot dy = -dt \end{cases}$$

Сложим два уравнения и получим: $\Rightarrow y\cdot dx + x\cdot dy = 0$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

$$\Rightarrow y \cdot dx + x \cdot dy = 0 \Rightarrow d(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y})$$

$$d(\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}) = 0 \Rightarrow \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = c_1$$ - Первый интеграл

Получим уравнения y=y(t) и x=x(t). Для этого подставим выражение $y = c_1 / x$ в исходное уравнение и получим: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} = \frac{x}{C_1}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{C_1} \Rightarrow \ln|x| = \frac{t}{C_1} + \ln(\mathrm{C}_2) = \ln(\mathrm{C}_2 \exp^{\frac{t}{C_1}})$$

откуда следует $x = \mathrm{C}_2 \exp^{\frac{t}{C_1}}$ По аналогии $y = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \exp^{\frac{-t}{C_1}}$

Итоговый ответ: $x = \mathrm{C}_2 \exp^{\frac{t}{C_1}}$ $y = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \exp^{\frac{-t}{C_1}}$

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!