INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Применение операционного исчисления в экономике.

Кольцов С.Н

2014

www.linis.ru

История возникновения операционного исчисления

В середине XIX века появился ряд сочинений, посвящённых так называемому символическому исчислению и применению его к решению некоторых типов линейных дифференциальных уравнений. Принято выделять две основные работы

1. Работа русского математика М. Е. Ващенко-Захарченко (1862) «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений». В ней поставлены и разрешены основные задачи того метода, который в дальнейшем получил название операционного.

2. В 1892 году появились работы английского учёного О. Хевисайда, посвящённые применению метода символического исчисления к решению задач по теории распространения электрических колебаний в проводах. Труды Хевисайда положили начало систематическому применению символического, или операционного, исчисления к решению физических и технических задач, а уже в 20 веке данное направление стало применятся в экономике.

Идея операционного исчисления

Основная суть операционного исчисления состоит в следующем: функция действительной переменной f(t) с помощью так называемого преобразования Лапласа отображается в функцию комплексной переменной:

$$f \xrightarrow{L} F$$

Терминология:
Функция **f - оригинал**
Функция **F - изображение**

Заглавной буквой **L** обозначается преобразование Лапласа. Следует отметить, что F – функция комплексной переменной. Если нужно преобразовать изображение в оригинал, то существует обратное преобразование Лапласа.

$$F \xrightarrow{L} f$$

Зачем всё это нужно? В ряде задач высшей математики бывает очень выгодно перейти от оригиналов **f** к изображениям **F**, поскольку в этом случае решение задания значительно упрощается (решение дифференциальных уравнений).

Идея операционного исчисления

Предположим, что наша экономическая модель описывается неоднородным дифференциальным уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$x'' + px' + qx = f(t)$$

С граничными условиями

$$x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta$$

Мы можем сделать преобразование нашего дифференциального уравнения (x - оригинал) в изображение. При этом дифференциальное уравнение превратится в алгебраическое уравнение. Соответственно, алгебраическое уравнение может быть решено. После этого, решение алгебраического уравнения можно преобразовать обратно в область оригинала, то есть получить решение исходного дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение (область оригинала) → Алгебраическое уравнение

↓

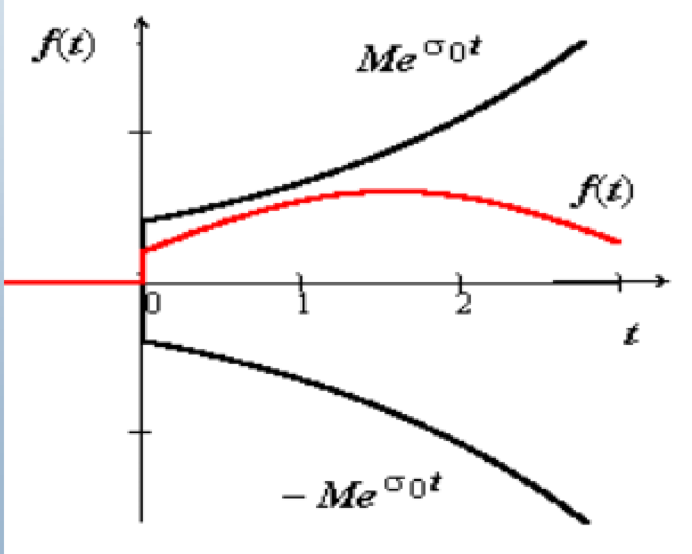
Решение дифференциального уравнения ← Решение алгебраического уравнения

Операционное исчисление

1. Преобразование Лапласа позволяет для большинства практически важных случаев установить взаимно однозначное соответствие между функцией действительного переменного **f(t) (оригиналом)** и функцией комплексного переменного **F(p) (изображением),** отличающееся тем, что многим соотношениям и операциям над оригиналами **f(t)** соответствуют более простые соотношения и операции над их изображениями **F(p)**.
2. При рассмотрении динамики системы управления всегда можно считать, что возмущение или какое-либо управляющее воздействие возникает к моменту времени **t=0, т.е. φ(t)=0 при t<0.**

Условия существования «оригинала»

1. f(t)=0 при t<0
2. Функция удовлетворяет условиям Дирихле при t>0
3. При t>0 функция по абсолютному значению ограничена верхним пределом: $$|f(t)| \le Me^{\sigma_0 t}$$



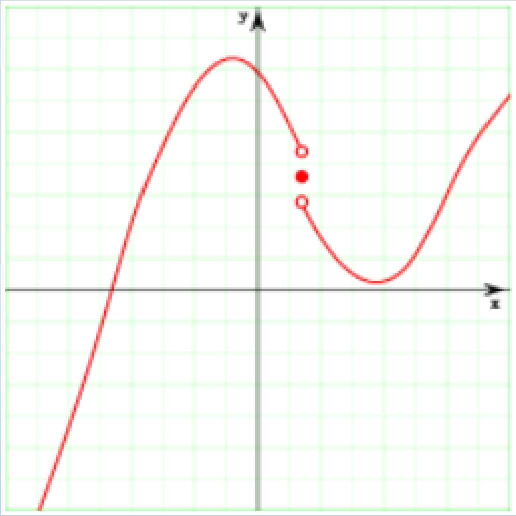
Операционное исчисление

Условиям Дирихле для функции:

a) ограничена,

b) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,

c) имеет конечное число экстремумов.



Точки разрыва первого и второго рода

Если функция имеет разрыв в данной точке (то есть предел функции в данной точке отсутствует или не совпадает со значением функции в данной точке), то для числовых функций возникает два возможных варианта, связанных с существованием у числовых функций односторонних пределов:

1. если оба односторонних предела существуют и конечны, то такую точку называют **точкой разрыва первого рода**. Точки устранимого разрыва являются точками разрыва первого рода;

если хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной, то такую точку называют **точкой разрыва второго рода**.

Операционное исчисление

Определение. Изображением по Лапласу функции **f (t)** называется функция комплексного переменного $p = s + i\sigma$ определяемая соотношением:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Символически это записывается так: $F(p) = L\{f(t)\}$ или $F(p) \to f(t)$

Пример 1. Найти изображение функций: $f(t) = a^t\,,\ t > 0$

Так как $a = e^{\ln a}$, то $f(t) = e^{t\cdot\ln a}$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-t(p-\ln a)}dt = -\left.\frac{e^{-t(p-\ln a)}}{p-\ln a}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-\ln a}$$

Таблица изображений основных функций

№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение	№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	10	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	11	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3	$\mathrm{e}^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	12	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^{n+1}}$
4	$Sin\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	13	$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
5	$Cos\,\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	14	$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

Таблица изображений основных функций

№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение	№	F(t) — оригинал (t>0)	F(p) — изображение
6	$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	15	$t^n \sin \omega t$	$\frac{n!\,\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
7	$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	16	$t^n \cos \omega t$	$\frac{n!\,\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(\beta^2+\omega^2)^{n+1}}$
8	Sin$(t-\alpha),\alpha>0$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$	17	$t^n e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}-\frac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$
9	Cos$(t-\alpha),\alpha>0$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$	18	$t^n e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}+\frac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$

Пример нахождения изображения

Пример. Найти изображение функции: $f(t)=\cos^3 t.$

Вспоминаем формулу Эйлера: $\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$

Вспоминаем одну из формул сокращенного умножения: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\cos^3 t=\frac{1}{8}\ (e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it})=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t.$$

Смотрим формулу преобразования для косинуса:

$Cos\ \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$$F(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{4}\cdot\frac{p^2+1+3p+27}{(p^2+9)(p^2+1)}=\frac{p(p^2+7)}{(p^2+9)(p^2+1)}$$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях:

$$x'' - 3x' - 4x = 4t - 5, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2$$

Вспомним образы производных: 1. $x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0)$

2. $x''(t) \xrightarrow{L} p^2 X(p) - p \cdot x(0) - x'(0)$

Таким образом: $x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - (-1) = pX(p) + 1$

$$x''(t) \xrightarrow{L} p^2 X(p) - p \cdot (-1) - 3 = p^2 X(p) + p - 2$$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Теперь рассмотрим правую часть нашего уравнения:

$$x'' - 3x' - 4x = 4t - 5, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2$$

Const может быть вынесена из под знака интеграла, соответственно:

$$1 \xrightarrow{L} \frac{1}{p}$$

Если есть const, но нет t, тогда преобразования
Лапласа от 1 будет:

$$t \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2}$$

Результаты преобразования:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(p)$$

$$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) + 1$$

$$x''(t) \xrightarrow{L} p^2 X(p) + p - 2$$

$$t \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2}$$

$$1 \xrightarrow{L} \frac{1}{p}$$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Таким образом, наше дифференциальное уравнение:

$$x'' - 3x' - 4x = 4t - 5, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$p^2 X(p) + p - 2 - 3(pX(p) + 1) - 4X(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}$$

В левой части выносим за скобки операторное решение, в правой части приводим выражение к общему знаменателю:

$$(p^2 - 3p - 4)X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{p^2}$$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

В итоге алгебраических преобразований получим выражение:

$$X(p)=\frac{-p^3+5p^2-5p+4}{p^2(p+1)(p-4)}$$

Цель достигнута – операторное решение выражено через одну дробь.

Используя **метод неопределенных коэффициентов**, операторное решение уравнения следует разложить в сумму элементарных дробей:

$$X(p)=2\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-3\cdot\frac{1}{p+1}$$

А вот теперь можно сделать обратное преобразование Лапласа.

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Перейдем от изображений к соответствующим оригиналам:

$$X(p) \xrightarrow{L^{-1}} x(t)$$

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{L^{-1}} 1$$

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{L^{-1}} t$$

$$\frac{1}{p+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t}$$

Было:

$$X(p) = 2 \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - 3 \cdot \frac{1}{p+1}$$

Стало:

$$x(t) = 2 - t - 3e^{-t}$$

Метод неопределенных коэффициентов

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{x-x_2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \\ + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \ldots + \frac{F_kx + G_k}{(x^2 + p_1x + q_1)^k} + \ldots$$

суть которого состоит в следующем:

1. Правую часть записанного равенства приводим к общему знаменателю, который совпадает со знаменателем дроби, стоящей в левой части этого равенства - $Q_n(x)$, в числителе левой части получим некоторый многочлен $R_m(x)$ с неизвестными коэффициентами;

2. Используем тот факт, что две дроби равны, когда равны их числители и знаменатели. Из того, что знаменатели левой и правой частей равенства равны, то значит, равны и числители:

$$P_m(x) = R_m(x)$$

Метод неопределенных коэффициентов http://math.semestr.ru/math/parfrac.php

Например разложим дробь на простые дроби: $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$

Знаменатель можно записать следующим образом: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Таким образом, получим: $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$

Правую часть дроби можно представить в виде суммы простых дробей: $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

Коэффициенты **A** и **B** нам не известны:

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3=(A+B)x-3A-2B$$

$$A=-5$$
$$B=6$$

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Самостоятельное решаем следующее уравнение:

$f'(t) + f(t) = 1$ при $f(0) = 0.$

Применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

Самостоятельное решаем следующее уравнение:

$$f'(t)+f(t)=1$$ при $$f(0)=0.$$

Решение: $\mathcal{L}\{f'(t)+f(t)\}=\mathcal{L}\{f'(t)\}+\mathcal{L}\{f(t)\}$ $=sF(s)-f(0)+F(s)$

$=(s+1)F(s)=\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{1}{s}$ $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}.$

Теперь делаем обратное преобразование, и получаем: $f(t)=1-e^{-t}$

Применение операционного исчисления в экономике

В экономике могут одновременно протекать несколько разноплановых переходных процессов. Некоторые из них ≪быстрые≫, другие ≪медленные≫. Если нас интересуют ≪быстрые≫ процессы, то ≪медленными≫ можно пренебречь. Если же для нас важны ≪медленные≫ процессы, то ≪быстрые≫ процессы можно апроксемировать с помощью процедуры осреднения (или сглаживания).

К ≪**медленным**≫ можно отнести процессы, обусловленные научно-техническим прогрессом.

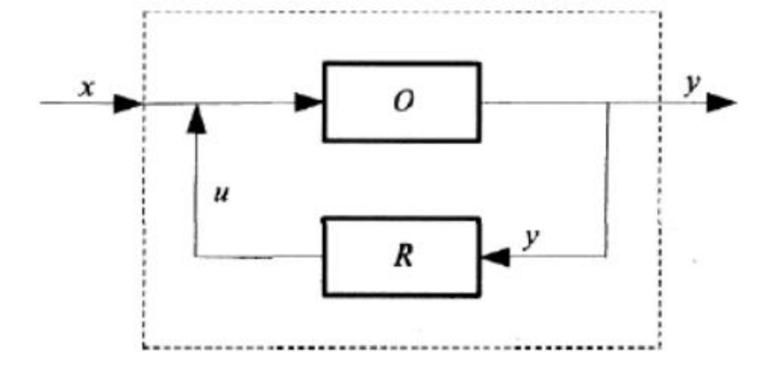
≪Быстрыми≫ можно считать процессы, вызванные изменением конъюнктуры рынка, управляющими решениями (например, изменением политики) и т.п. В таких ситуациях экономика по завершении переходного процесса либо возвращается в первоначальное состояние, либо оказывается в новом состоянии.

Применение операционного исчисления в экономике

Динамический характер экономической системы проявляется в том, что причина (изменение в конъюнктуре рынка, объеме инвестиций, структурной или налоговой политике, технологическом укладе и т.д.) переходит в следствие (новое состояние экономической системы) не мгновенно, а с некоторым запозданием.

Исследование макроэкономических процессов будет осуществляться с помощью математических методов и моделей, прежде всего с помощью теории динамических систем (главным образом, теории автоматического регулирования), опирающейся на аппарат дифференциальных уравнений и преобразований Лапласа.

Экономическую систему (модель) можно представить в виде некого контура, у которого есть вход, выход и обратная связь.



Применение операционного исчисления в экономике

Элементы, из которых состоит система, могут быть статическими или динамическими.

Статический элемент без задержки (мгновенно) преобразует вход **x** в выход **y**. $y = F(x)$

Например, у компании выпуск **y** задается как функция затраченных на выпуск ресурсов **x**.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = F(x),$$

При этом, **F(x)** может быть линейной а может быть и нелинейной.

Нелинейная динамическая модель

Нелинейный динамический элемент n-го порядка задается уравнением вида:

$$F(y^{(n)}, \ldots, y', y, x^{(m)}, \ldots, x', x) = 0,$$

где **x(t)** – воздействие на вход системы (может быть и равным нулю),
y(t) – реакция нашей модели на воздействие.

Можно выделить три элемента в такой системе:
1. Мультипликатор, 2. Акселератор. 3. Инерционное свено.

Мультипликатор
Мультипликатор — линейное статическое звено, задаваемое уравнением:

$$a_0 y = b_0 x, \quad \text{или} \quad y = \alpha x, \quad \alpha = b_0 / a_0.$$

Нелинейная динамическая модель

Акселератор

Акселератор — дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа.

Например, инвестиции могут быть выражены через скорость изменения **ВВП,** или акселератор Харольда.

Инерционное звено

Инерционное звено задается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T\frac{dy}{dt}+y=\tilde{x}(t),$$

или

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{T}[x(t)-y(t)].$$

Инерционное звено описывает процесс ≪отработки≫ заданного входного воздействия *x(t), таким образом,* что скорость ≪отработки≫ пропорциональна разности между входом и выходом.

МОДЕЛИ ЭВАНСА УСТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

Цена товара является функцией от времени $p = p(t)$, $t \geq 0$.

Предложение является функцией от цены товара в момент времени *t* и *определяется формулой:*

$$S = S(t) = S(p(t)) = a + bp,$$

Спрос является функцией от цены товара в момент времени *t и* определяется формулой:

$$D = D(t) = D(p(t)) = c - dp$$

Цена товара выражается через спрос и предложение следующим образом:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(D(t) - S(t)) \qquad \frac{dp}{dt} = -\gamma(b+d)p + \gamma(c-a)$$

Процесс установления равновесной цены описывается уравнением инерционного звена.

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!