

Нелинейная задача оптимизации.

Кольцов С.Н
2014

www.linis.ru

Задача безусловной оптимизации

Задача оптимизации формулируется следующим образом:

заданы множество X (допустимое множество задачи) и функция $f(x)$ (целевая функция), определенная на X ; требуется найти точки минимума или максимума функции f на X . Задача оптимизации, в которой целевая функция подлежит минимизации, имеет вид:

$$f(x) \rightarrow \min, \\ x \in X.$$

Точка $x^* \in X$ называется точкой глобального минимума $f(x)$ на множестве X , или глобальным решением задачи, если

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всех } x \in X.$$

Точка $x^* \in X$ называется точкой локального минимума $f(x)$ на множестве X , или локальным решением задачи, если

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всех } x \in X \cap V_\varepsilon(x^*),$$

где $V_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x^* (ε – окрестность точки x^*).

Задача безусловной оптимизации для одномерной функции

Необходимое условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^1$. Если x^* – точка локального оптимума (экстремума), то

$$f'(x^*) = 0.$$

Точки, удовлетворяющие вышеуказанному условию, называются **стационарными**. Стационарные точки могут быть и точками **локального минимума**, и точками **локального максимума**, и точками **перегиба**.

Достаточное условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ k раз, $k > 1$, дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^1$, причем

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Тогда, если k – четное число, то x^* – точка локального минимума (максимума) при $f^{(k)}(x^*) > 0$ (при $f^{(k)}(x^*) < 0$). Если k – нечетное число, то x^* – точка перегиба.

Принцип определения точек глобального экстремума.

Для определения точек глобальных экстремумов вычисляются предельные (при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$) значения $f(x)$. Если

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty$$

то $f(x)$ не имеет конечного **глобального максимума**. Если

$$W \equiv \min \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = -\infty$$

то $f(x)$ не имеет конечного **глобального минимума**.

Если $f(x)$ имеет конечный глобальный максимум и (или) конечный глобальный минимум, то для их определения вычисляются также значения $f(x)$ на множестве точек локальных экстремумов. Наименьшее из полученных значений, т.е. Значений $f(x)$ в точках локальных экстремумов и предельных значений $f(x)$, определяет точку глобального минимума, наибольшее из полученных значений – точку глобального максимума $f(x)$.

Алгоритм определения точек локальных и глобальных экстремумов функции одной переменной

Пусть у нас есть целевая функция $f(x)$:

1. Находится $f'(x)$.
2. Вычисляются корни уравнения $f'(x) = 0$ – *стационарные точки* $x(i)$, $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$, где N – *число стационарных точек*.
3. Находится $f''(x)$.,
4. Вычисляются значения $f''(x)$, то есть, ищем значения полученных функций в стационарных точках.
5. Если $f''(x) \neq 0$ то определяется тип стационарной точки $x(i)$, то есть определяем максимум (минимум) или точку перегиба.
7. Вычисляются предельные (при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$) значения $f(x)$.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции. **Пример 1.**

Пусть есть функция:

$$f(x) = (1 - x)^3.$$

1. Находим первую производную $f'(x)$:

$$f'(x) = -3(1 - x)^2.$$

2. Вычисляем корни уравнения $f'(x) = 0$:

$$-3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow (1 - x)^2 = 0 \rightarrow x_{(1)} = 1.$$

Получили одну стационарную точку:

$$x_{(1)} = 1.$$

Теперь определяем характер стационарной точки.

Для этой цели ищем следующие производные нашей целевой функции

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

3. Находим вторую производную $f(x)$:

$$f''(x) = 6(1 - x).$$

4. Вычисляем значение второй производной в стационарной точке $x=1$.

$$f''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Так как у нас значение второй производной в стационарной точке равно нулю, то ищем следующую производную и определяем значение этой производной в стационарной точке.

5. Значение третьей производной в точке $x=1$.

$$f'''(x) = -6 \neq 0.$$

Так как у нас не нулевая производная нечетная, следовательно точка $x=1$ является точкой перегиба.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

Теперь определяем глобальные максимумы (минимумы):

Вычисляем предельные значения $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) \right\}^3 = (1-\infty)^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \right\}^3 = (1+\infty)^3 = \infty.$$

Поскольку

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty,$$

то $f(x)$ не имеет конечного глобального максимума.

Поскольку

$$W \equiv \min \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = -\infty,$$

то $f(x)$ не имеет конечного глобального минимума.

Ответ: функция $f(x) = (1-x)^3$ экстремумов не имеет.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции. **Пример 2.**

Пусть есть функция: $f(x) = (1 - x)^4.$

1. Находим первую производную $f'(x)$:

$$f'(x) = -4(1 - x)^3.$$

2. Вычисляем корни уравнения:

$$-4(1 - x)^3 = 0 \rightarrow (1 - x)^3 = 0 \rightarrow x_{(1)} = 1.$$

3. Определяем характер стационарной точки.

$$f''(x) = 12(1 - x)^2.$$



$$f''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

$$f'''(x) = -24(1 - x).$$



$$f'''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Поскольку характер стационарной точки не определен, то находим четвертую производную $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = 24 \neq 0.$$

Так как у нас 4 производная (четная) и она положительная в стационарной точке, то наша точка является точкой локального минимума.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x)^4 = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x) \right\}^4 = (1 - \infty)^4 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)^4 = \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) \right\}^4 = (1 + \infty)^4 = \infty.$$

Поскольку

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty,$$

$f(x)$ не имеет конечного глобального максимума, и имеется глобальный минимум.

Задача безусловной оптимизации для функции двух переменных.

Для функции $f(x)$ многих переменных точка x представляет собой вектор, $f'(x)$ – вектор первых производных (градиент) функции $f(x)$, $f''(x)$ – симметричную матрицу вторых частных производных (матрицу Гессе – гессиан) функции $f(x)$.

Необходимое условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in R$. Если x^* – точка локального экстремума, то

$$f'(x^*) = 0.$$

Характер стационарной точки x^* связан со знакоопределенностью матрицы Гессе $f''(x^*)$.

Задача безусловной оптимизации для функции двух переменных.

Достаточное условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, причем $f'(x^*) = 0$, т.е. x^* – стационарная точка.

Тогда, если матрица $f''(x^*)$ является положительно (отрицательно) определенной, то x^* – **точка локального минимума (максимума)**; если матрица $f''(x^*)$ является неопределенной, то x^* – **седловая точка**. Если матрица $f''(x^*)$ является неотрицательно (неположительно) определенной, то для определения характера стационарной точки x^* требуется исследование производных более высокого порядка.

Для проверки знакоопределенности матрицы, используется **критерий Сильвестра**. Согласно этому критерию, симметричная матрица A является положительно определенной в том и только том случае, если все ее угловые миноры положительны. При этом угловым минором матрицы A называется определитель матрицы, построенной из элементов матрицы A , стоящих на пересечении строк и столбцов с одинаковыми (причем первыми) номерами

Что такое угловой минор.

Пусть матрица квадратичной формы $f(x) = x^T A x$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Рассмотрим *угловые миноры* этой матрицы (которые также называют *главными минорами*):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n -го порядка представляет собой определитель матрицы.

Алгоритм определения точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Пусть у нас есть целевая функция $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

1. Находится $f'(x)$.

2. Решается система

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

3. Вычисляются стационарные точки

4. Находится $f''(x)$, и вычисляем значение производных в стационарных точках.

5. Вычисляются угловые миноры матрицы $f''(x(i))$.

Алгоритм определения точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Если не все угловые миноры ненулевые, то для определения характера стационарной точки $x(i)$ требуется исследование производных более высокого порядка.

6. Анализируются знаки угловых миноров $f''(x(i))$.

Если $f''(x(i))$ является положительно определенной, то $x(i)$ является точкой локального минимума.

7. Вычисляются угловые миноры матрицы $[-f''(x(i))]$ и анализируются их знаки.

Если $[-f''(x(i))]$ является положительно определенной, то $f''(x(i))$ является отрицательно определенной и $x(i)$ является точкой локального максимума.

В противном случае $f''(x(i))$ является неопределенной и $x(i)$ является седловой точкой.

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных. **Пример.**

У нас есть следующая функция:

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2.$$

1. Находим первые частные производные $f(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2 - 2.$$

2. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_2 - 3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Решением системы уравнения будут следующие точки:

$$x_{(1)} = (-1, 0), \quad x_{(2)} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Таким образом у нас есть две стационарные точки.

3. Находим вторые частные производные $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Составляем матрицу Гессе.
И на основании этой матрицы определяем характер стационарных точек.

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим первую точку $(-1,0)$;

$$f''(x_{(1)}) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Угловые
миноры для
данной
матрицы будут:

$$M_1 = |-6| = -6 < 0,$$
$$M_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-6)2 - (-2)(-2) = -16 < 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку все угловые миноры ненулевые, то характер $x(1)$ *определяется с помощью $f''(x)$.*

Поскольку матрица $f''(x(1))$ *не является положительно определенной,* то рассматриваем матрицу $[-f''(x(1))]$:

$$-f''(x_{(1)}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Угловые миноры $[-f''(x(1))]$:

$$M_1 = |6| = 6 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) - 2 \cdot 2 = -16 < 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку матрица $[-f''(x(1))]$ не является положительно определенной, то матрица $f''(x(1))$ не является отрицательно определенной. Следовательно, матрица $f''(x(1))$ является неопределенной и $x(1)$ является **седловой точкой**.

Теперь рассмотрим вторую стационарную точку:

$$x_{(2)} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Теперь рассчитываем матрицу Гессе:

$$f''(x_{(2)}) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Угловые миноры $f''(x(2))$:

$$M_1 = |10| = 10 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 2 - (-2)(-2) = 16 > 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку все угловые миноры ненулевые, то характер $x(2)$ определяется с помощью $f''(x)$.

Поскольку матрица $f''(x(2))$ является положительно определенной, то $x(2)$ является точкой локального минимума.

Ответ: функция $f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$ имеет в точке $x = (5/3, 8/3)$ локальный минимум.

ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Данная задача записывается в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ g_i(x) &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Для решения данной задачи используется метод множителей Лагранжа. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум исходной функции $f(x)$ к задаче на безусловный экстремум некоторой специально построенной функции Лагранжа $L(x, \lambda)$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x),$$

Необходимое условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_m(x)$ дифференцируемы в точке $x^* \in R$. Если x^* – точка локального экстремума, то существует вектор $\lambda = \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_n^*$, компоненты которого не равны нулю одновременно.

ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

При этом должны выполняться *условия регулярности*: градиенты $g'_1(x^*), g'_2(x^*), \dots, g'_m(x^*)$ должны быть линейно независимы. Это означает, что ранг матрицы G' , строками которой являются градиенты $g'_i(x^*)$, должен быть равен m .

Любая точка x^* , удовлетворяющая при некотором ненулевом λ^* условиям (2.2), называется *стационарной* точкой задачи

Для определения характера стационарных точек используется достаточное условие оптимальности с привлечением матрицы $L_{x'x}(x, \lambda)$ вторых частных производных функции Лагранжа по x_j , $j = 1, n$.

ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Достаточное условие локальной оптимальности

$f(x)$, $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ дважды дифференцируемы в точке $x^* \in R^n$, причем при некотором $\lambda^* \neq 0$ выполняются условия (2.2), т.е. x^* – стационарная точка. Тогда, если

$$\langle \alpha L''_{xx}(x^*, \lambda^*), \alpha \rangle > 0 \quad (\langle \alpha L''_{xx}(x^*, \lambda^*), \alpha \rangle < 0)$$

при всех ненулевых $\alpha \in R$ таких, что

$$\langle g'_i(x^*), \alpha \rangle = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

то x^* – точка локального минимума (максимума) $f(x)$ на множестве X .

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов

1. Составляется функция Лагранжа $L(x, \lambda)$.

2. Находим производную: $L'_x(x, \lambda)$.

3. Решаем систему:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n};$$
$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

В результате вычисляются стационарные точки.

Далее необходимо определить тип стационарных точек.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов

4. Ищем $\langle g'_i(x), \alpha \rangle$, с целью определения коэффициентов α
5. Находится $L''_{xx}(x_{(l)}, \lambda_{(l)})$ И составляется квадратичная форма.
6. Находится значения коэффициентов α и производится исследование знаков квадратичной формы.
7. Вычисляются значения $Q_l(\alpha_{(r)})$ и анализируются их знаки.
Если $Q_l(\alpha_{(r)}) > 0$ для всех ненулевых $\alpha_{(r)}$, то $x_{(l)}$ – точка условного локального минимума.
Если $Q_l(\alpha_{(r)}) < 0$ для всех ненулевых $\alpha_{(r)}$, то $x_{(l)}$ – точка условного локального максимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов. **Пример.**

Определить точки локальных экстремумов функции.

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

При условии: $x_1^3 + x_2^3 = 1$.

Решение.

1. Составляем функцию Лагранжа.

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

2. Находим частные
производные:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = ax_1 + 3\lambda x_1^2, \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = bx_2 + 3\lambda x_2^2.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + 3\lambda x_1^2 = x_1(a + 3\lambda x_1) = 0, \\ bx_2 + 3\lambda x_2^2 = x_2(b + 3\lambda x_2) = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем три решения:

3.1. Пусть $x_1 = 0$ тогда $x_2 = 1$ Так как $x_2 \neq 0$,

то из второго уравнения следует $b + 3\lambda x_2 = 0 \rightarrow \lambda = -b/3.$

Таким образом получаем первую стационарную точку:

$$x_{(1)} = (0, 1), \quad \lambda_{(1)} = -b/3.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3.2. Второе решение

$$x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 1.$$

Так как $x_1 \neq 0$ то для удовлетворения второго уравнения должно выполняться условие:

$$a + 3\lambda x_1 = 0 \longrightarrow \lambda = -a/3.$$

Таким образом получаем вторую стационарную точку:

$$x_{(2)} = (1, 0), \quad \lambda_{(2)} = -a/3.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3.3. Третье решение Пусть $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, тогда из первого уравнения следует:

$$a + 3\lambda x_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = -a/3x_1$$

Для удовлетворения второго уравнения должно выполняться условие:

$$b + 3\lambda x_2 = 0$$

Опуская промежуточные выражения, получим третью стационарную точку
(**нужно получить этот результат самостоятельно**):

$$x_{(3)} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \right) \quad \lambda_{(3)} = -\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

4. Теперь нужно найти коэффициенты α
на основе уравнений

$$\langle g'(x), \alpha \rangle :$$

Вспомним наше ограничение:

$$x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2, \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = 3x_2^2,$$

Теперь построим квадратичную форму на основе производных функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_1^2} = a + 6\lambda x_1, \quad \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_2^2} = b + 6\lambda x_2,$$
$$L''_{xx}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Для того что бы проанализировать тип стационарных точек, нужно подставить значения точек в квадратичную форму.

Первая стационарная точка $x_{(1)} = (0, 1), \quad \lambda_{(1)} = -b/3.$

Рассчитываем матрицу

$$L''_{xx}(x_{(1)}, \lambda_{(1)}) = \begin{bmatrix} a + 6\left(-\frac{b}{3}\right) & 0 \\ 0 & b + 6\left(-\frac{b}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

Нам нужно искать решение в виде квадратичной форме:

$$\alpha L''_{xx}(x_{(1)}, \lambda_{(1)}) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = (a\alpha_1, -b\alpha_2),$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

$$Q_1(\alpha) = \langle (a\alpha_1, -b\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle = a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2.$$

Вспомним, что у нас есть уравнение : $\langle g'(x_{(1)}), \alpha \rangle = 0$

Таким образом, получим:

$$3 \cdot 0 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot 1 \cdot \alpha_2 = 0 \rightarrow 3\alpha_2 = 0.$$

Решением являются точки: $\alpha_{(r)} = (\alpha_1, 0).$

На основании последнего результата можно определить знак квадратичной формы Q .

$$Q_1(\alpha_{(r)}) = a\alpha_1^2 > 0 \text{ при } \alpha_1 \neq 0.$$

Первая стационарная точка это точкой условного локального минимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Вторая стационарная точка:

$$x_{(2)} = (1, 0), \quad \lambda_{(2)} = -a/3.$$

Матрицы вторых производных функции Лагранжа:

$$L''_{xx}(x_{(2)}, \lambda_{(2)}) = \begin{bmatrix} a + 6\left(-\frac{a}{3}\right) & 0 \\ 0 & b + 6\left(-\frac{a}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Квадратичная
форма:

$$\alpha L''_{xx}(x_{(2)}, \lambda_{(2)}) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = (-a\alpha_1, b\alpha_2),$$
$$Q_2(\alpha) = \langle (-a\alpha_1, b\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle = -a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Решаем уравнение для второй стационарной точки:

$$\langle g'(x_{(2)}), \alpha \rangle = 0$$

$$3 \cdot 1 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot 0 \cdot \alpha_2 = 0 \rightarrow 3\alpha_1 = 0.$$

В итоге получим следующее решение: $\alpha_{(r)} = (0, \alpha_2)$.

Так как у нас получилось, что квадр. Форма > 0

$$Q_2(\alpha_{(r)}) = b\alpha_2^2 > 0 \text{ при } \alpha_2 \neq 0.$$

То вторая точка является точкой условного локального минимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Третья стационарная точка:

$$x_{(3)} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \right) \quad \lambda_{(3)} = -\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3}.$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа.

$L''_{xx}(x_{(3)}, \lambda_{(3)}) :$

$$L''_{xx}(x_{(3)}, \lambda_{(3)}) = \begin{bmatrix} a + 6 \left(-\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3} \right) \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} & 0 \\ 0 & b + 6 \left(-\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3} \right) \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Квадратичная форма для третьей точки будет.

$$\alpha L''_{xx}(x_{(3)}, \lambda_{(3)}) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = (-a\alpha_1, -b\alpha_2),$$

$$Q_{(3)}(\alpha) = \langle (-a\alpha_1, -b\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle = -a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2 = -(a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2).$$

С учетом уравнения $\langle g'(x_{(3)}), \alpha \rangle = 0$

Получим, что третья стационарная точка является точкой условного локального максимума.

Задача квадратичного программирования.

Задачей квадратичного программирования (КП) называется задача оптимизации с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями.

Математическая формулировка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jk} x_j x_k \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для решения задачи КП используются необходимые условия Куна – Таккера. Рассмотрим принцип решения такой задачи.

Задача квадратичного программирования.

1. Составляем уравнение Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x),$$

при условии:

$$g_j(x) \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i.$$

Условия Куна – Таккера:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} \leq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_j \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} &= 0, \quad j = \overline{1, n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ \lambda_i \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Задача квадратичного программирования.

Непосредственное решение данной системы очень громоздко. Поэтому используется следующий прием: Неравенства преобразуют в равенства, вводя соответственно две группы дополнительных переменных, затем выделяется базис уравнений, которые собственно используются для решения.

$$v_j, j = \overline{1, n}, \quad \text{и} \quad w_i, i = \overline{1, m},$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} - v_j = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_j v_j = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} + w_i = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad w_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\lambda_i w_i = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Исходная задача эквивалентна задаче нахождения допустимого, т.е. удовлетворяющего требованиям неотрицательности и базисного решения системы линейных уравнений и удовлетворяющего также условиям дополняющей нежесткости

Пример решения задачи кв. программирования в Excel.

Задача. Предприятие имеет запасы 4-х видов ресурсов (мука, жиры, сахар, финансы), 2 вида продуктов (хлеб и батон).

Найти оптимальный план производства, при котором прибыль от реализации произведенной продукции должна быть максимальный. При чем **прибыль** равна **выручка – затраты**.

Экономико-математическая модель

Прибыль = $0,99 \cdot \text{Хлеб} + 1,21 \cdot \text{Батон} - \text{Хлеб}^{0,7} - \text{Батон}^{0,7} - \max$

Ограничение

$$0,6 \cdot \text{Хлеб} + 0,5 \cdot \text{Батон} \leq 120$$

$$0,05 \cdot \text{Хлеб} + 0,08 \cdot \text{Батон} \leq 70$$

$$0,2 \cdot \text{Хлеб} + 0,6 \cdot \text{Батон} \leq 65$$

$$0,2 \cdot \text{Хлеб} + 0,24 \cdot \text{Батон} \leq 50$$

$$\text{Хлеб}, \text{Батон} \geq 0$$

Пример решения задачи кв. программирования в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<i>Оптимальный план производства</i>							
2	Ресурсы	Хлеб	Батон	Запасы	Использовано	Остаток	Мн. Лаг	
3	Мука	0,6	0,5	120	0,0	120	1,2	
4	Жыры	0,05	0,08	70	0,0	70	0,0	
5	Сахар	0,2	0,6	65	0,0	65	0,7	
6	Финансы	0,2	0,24	50	0,0	50	0,0	
7	Цена	0,99	1,21		0,0	=Прибыль		
8	План	0,0	0,0					
9								



Поиск решения

Установить целевую ячейку:

\$E\$7

Выполнить

Заккрыть

Равной:

☒ максимальному значению
 ☐ значению: 0
 ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$B\$8:\$C\$8

Предположить

Ограничения:

\$E\$3:\$E\$6 <= \$D\$3:\$D\$6

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка

Пример решения задачи кв. программирования в Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости					
2	Рабочий лист: [opt_prod_plan.xls]Задача_нач.					
3	Отчет создан: 20.03.2007 9:19:21					
4						
5						
6	Изменяемые ячейки					
7			Результ.		Нормир.	
8	Ячейка		Имя		значение	
9	\$B\$8	План	Хлеб	151,9	0,0	
10	\$C\$8	План	Батон	57,7	0,0	
11						
12	Ограничения					
13			Результ.		Лагранжа	
14	Ячейка		Имя		Множитель	
15	\$E\$3	Мука	Использовано	120,0	1,2	
16	\$E\$4	Жыры	Использовано	12,2	0,0	
17	\$E\$5	Сахар	Использовано	65,0	0,7	
18	\$E\$6	Финансы	Использовано	44,2	0,0	
19						

THANK YOU!

← → ↻ www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html



[Главная](#)

[О нас](#)

[События](#)

[Публикации](#)

[Исследования](#)

[Материалы](#)

[Ссылки](#)

[Контакты](#)

[ENGLISH](#)

 [»](#)


Новости



Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИНИс в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИНИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радзев).

[Подробнее...](#)

ЛИНИс – участник Балтийского партнерства по новым медиа



Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИНИс).

[Подробнее...](#)

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция