INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Задачи динамической оптимизации

Кольцов С.Н

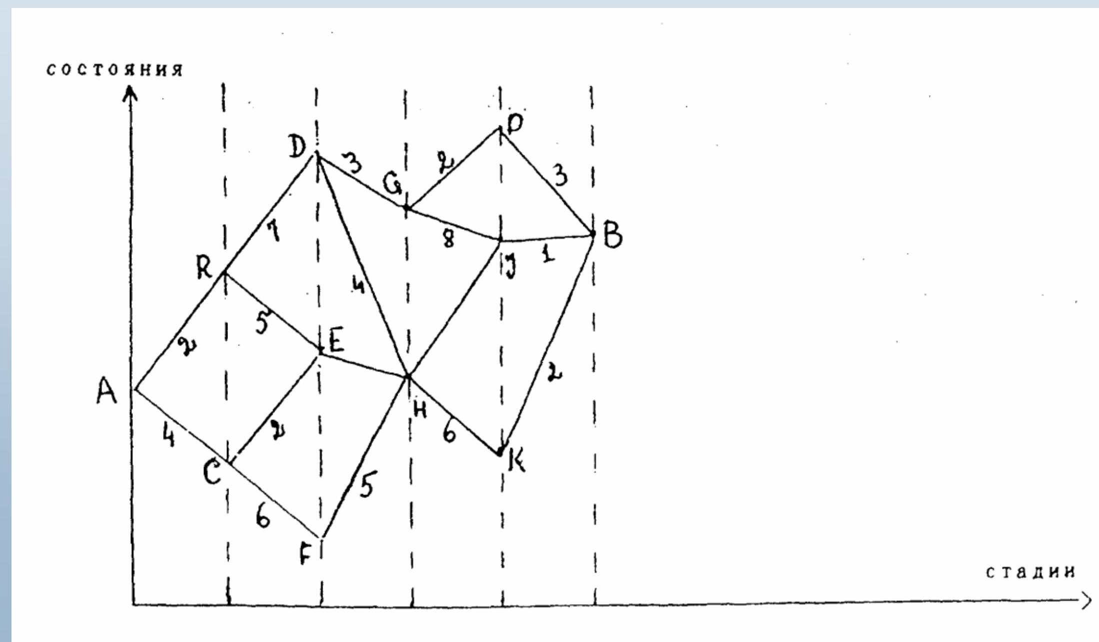
2014

www.linis.ru

Предмет динамической оптимизации

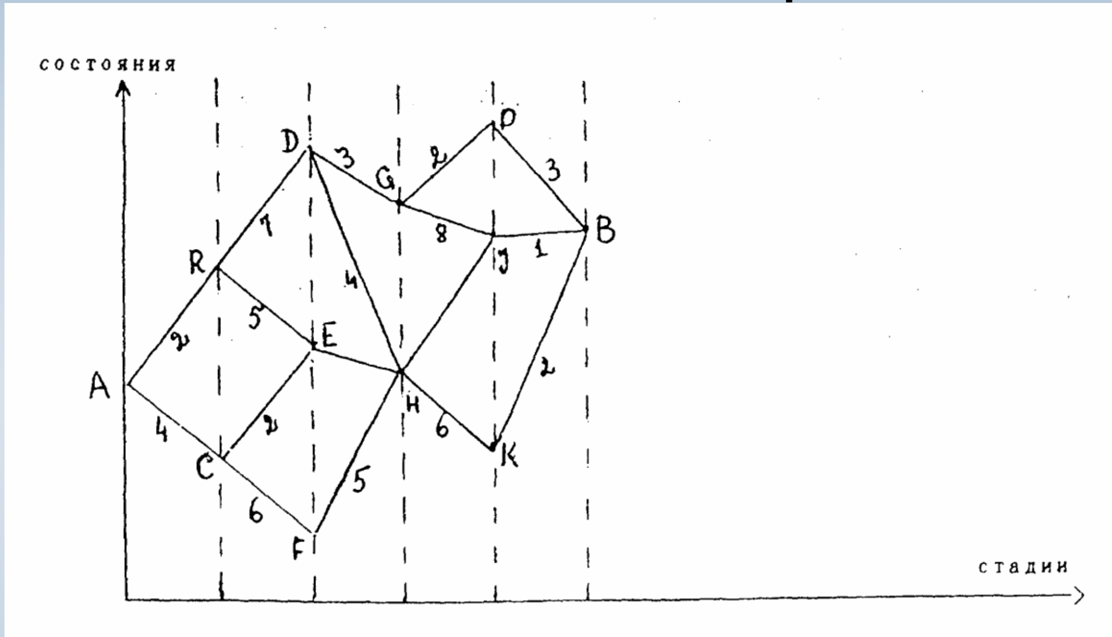
Предположим фирме необходимо преобразовать некоторый продукт из начального состояния *A* в конечное состояние *B*, причем процесс преобразования состоит из пяти стадий (может быть много стадий). На каждой стадии существует несколько возможных технологических решений, каждое из которых требует специфических затрат. **Вопрос состоит в следующем**: какую цепочку технологических решений должна выбрать фирма, чтобы минимизировать затраты?

A – начальное состояние, **B – конечное состояние**. Точки R,C,…,P,K показывают различные промежуточные состояния, в которые может преобразоваться продукт за время процесса.



Предмет динамической оптимизации

Минимальной стоимости путь может быть найден путем простого перебора всех возможных путей перехода из состояния А в состояние В. Однако, для более сложных задач необходимо значение систематических методов решения проблемы.



В нашем примере оптимальный путь есть кривая **ACEMJB**, с затратами 14 единиц на весь технологический процесс.

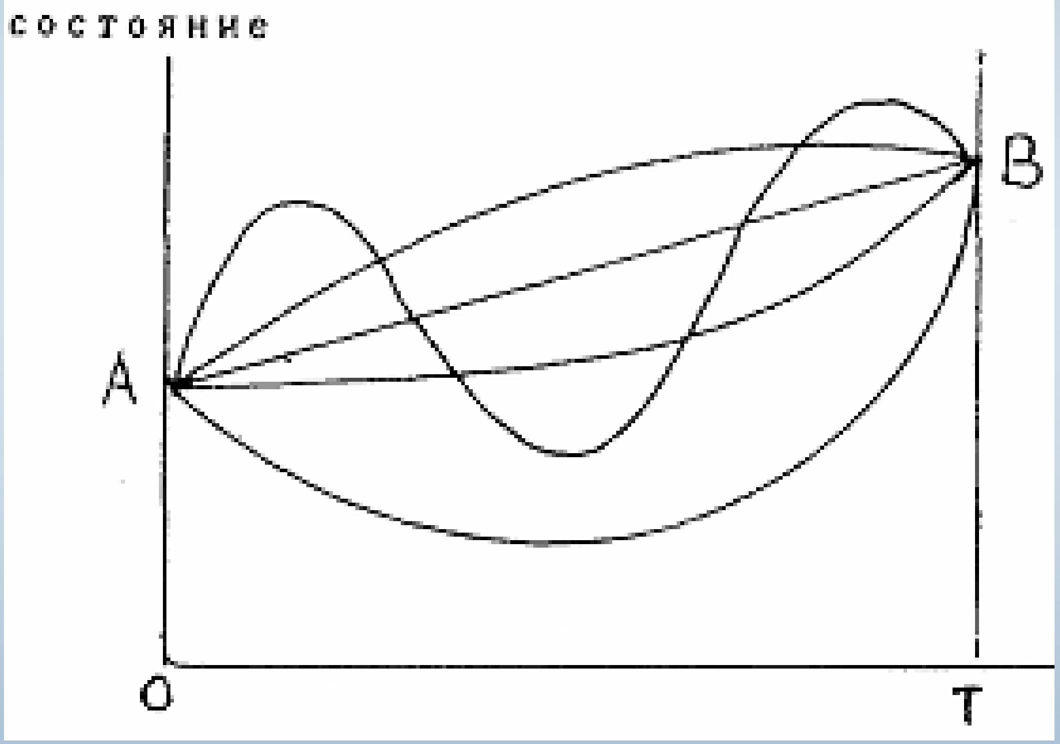
INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Предмет динамической оптимизации

Случай непрерывной переменной состояния

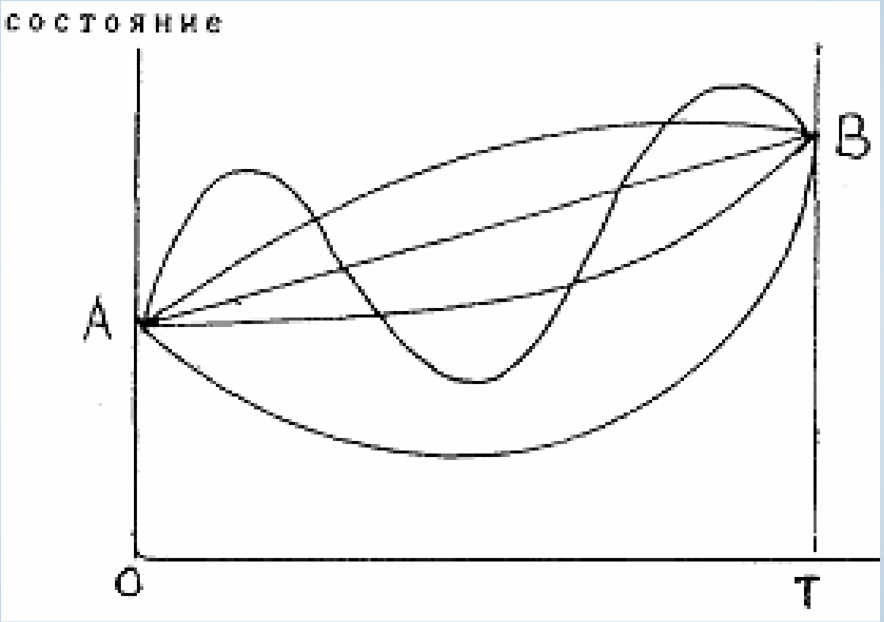
Теперь мы предположим ситуацию, когда переменная состояния непрерывная, то есть она принимает бесконечно много значений, сплошь заполняющих целый отрезок числовой оси. На представлены для простоты только пять возможных путей из А в В. Каждый возможный путь проходит через бесконечное число стадий, а именно, все стадии характеризуются числами на отрезке [0,T].



Например, переменная стадий представляет широту, а переменная состояний – долготу на некоторой карте местности. На рисунке предлагаются пять возможный путей переброски груза из точки А в точку В. Каждый путь характеризуется различными затратами на транспортировку на кривых.

Предмет динамической оптимизации

В подавляющем большинстве случаев переменная стадий будет означать время прошедшее от начала процесса. **Например.** рассмотрим фирму с начальным капиталом равным **А** в момент времени 0. Мы хотим изменить за время **Т** основной капитал до величины **В**. для этого существует несколько альтернативных инвестиционных планов, позволяющих достичь поставленную цель за время Т. В этом случае мы можем представлять кривые на рисунке как инвестиционные планы – пути, а значения, приписываемые каждой кривой, это различное потенциальные прибыли, соответствующие планам.



Задача фирмы выбрать оптимальный инвестиционный план, имеющий максимальную потенциальную прибыль.

Элементы динамической оптимизации

Из рассказанного, можно сделать вывод, что в состав динамической оптимизации входят следующие составные элементы:

1. Начальная и конечная точки;
2. Множество допустимых путей из начальной точки в конечную точку;
3. Множество значение целевой переменной или индексов связанных с допустимыми путями (стоимость, прибыли и т.п.);
4. Выбор оптимального пути из множества допустимых кривых, максимизируя или минимизируя целевую функцию (стоимость, прибыли и т.п.).

Принцип наименьшего действия

1. Античные натурфилософы (Аристотель) предполагали, что «природа ничего не делает напрасно и во всех своих проявлениях избирает кратчайший или легчайший путь». Однако конкретный смысл терминов «кратчайший» или «легчайший» не уточнялся. Например, Птолемей показал , что при отражении луча света его общий путь является кратчайшим в том случае, когда угол падения равен углу отражения, что и наблюдается на практике.

2. В 1740 году математик Пьер Луи Моро де Мопертюи, следуя теологическим мотивам о совершенстве и наиболее экономном устройстве Вселенной, провозгласил принцип наименьшего действия. **Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным.**

3. Эйлер опубликовал (в 1744 году) работу «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов», он придал принципу Мопертюи общемеханический характер: «Так как все явления природы следуют какому-нибудь закону максимума или минимума, то нет никакого сомнения, что и для кривых линий, которые описывают брошенные тела, когда на них действуют какие-нибудь силы, имеет место какое-то свойство максимума или минимума.

$$\int mv \, ds = \text{Min}$$

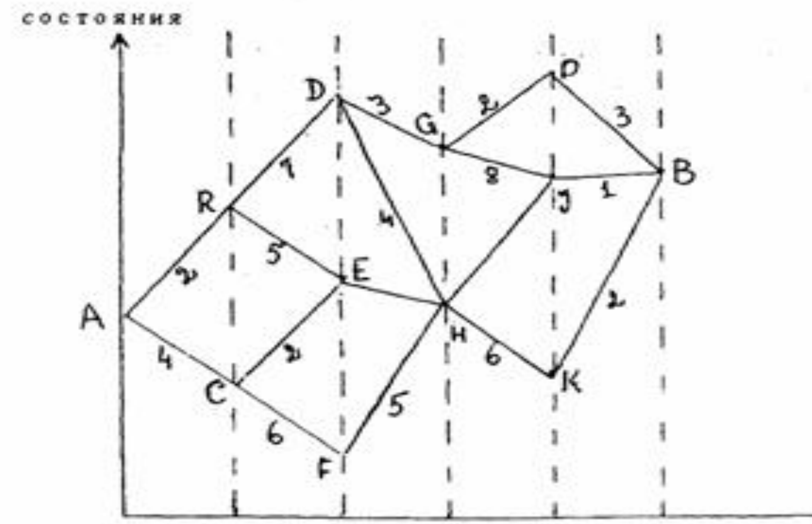
Интегральная форма функционала

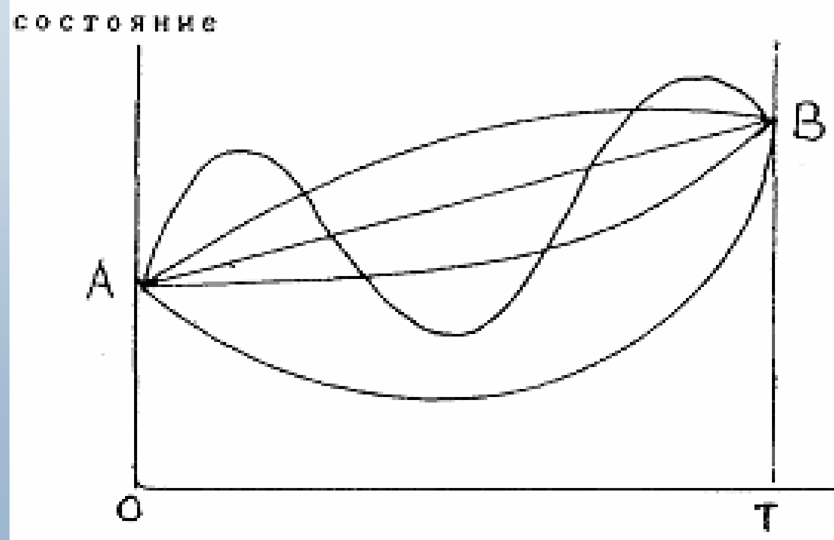
Оптимальный путь, по определению, это путь максимизирующий или минимизирующий значения целевого функционала.

В первом случае, значения целевой функции постоянны на отрезках, изображающих возможные переходы из одного состояния в другое. Целевой функционал представляет собой сумму значений целевой функции на всех участках пути из начальной точки A в конечную точку B. В случае непрерывной переменной изменения состояния, длинна элементарного участка становится бесконечно малой, он вырождается в точку, имеющую координаты t, y(t).

$$V[y] = \int_0^T F(t, y(t), y'(t))dt$$

F - некоторая функция, заданная на “вырожденных” отрезках, характеризующихся тремя числами t, y(t), y’(t).





Пример из экономики

Задача максимизации прибыли.
Пусть у нас есть некая компания, которая производит продукт и продает этот продукт. Предполагаем, что компания не накапливает и не расходует запасы продукции. Это значит, что выпуск продукции Q (t) равен спросу, то есть
Q = D (P, P’), где D =**D (P, P’)** - **функцией спроса, P (t) – цена на продукт,**
P’ (t) - скорость изменения цены на продукт.
Таким образом, общая выручка компании в момент времени t составит
R = P * Q = R (P, P’)
Если себестоимость C продукции зависит от количества выпущенной продукции Q, т.е. **C = C (Q) = C [D (P, P’)]**
Тогда общая прибыль будет

$$\Pi = R - C = R(P, P') - C[D(P, P')] = \Pi(P, P')$$

Тогда прибыль за пятилетний период, будет выражена в виде функционала:

$$V = \int_0^5 \Pi(P, P')dt,$$

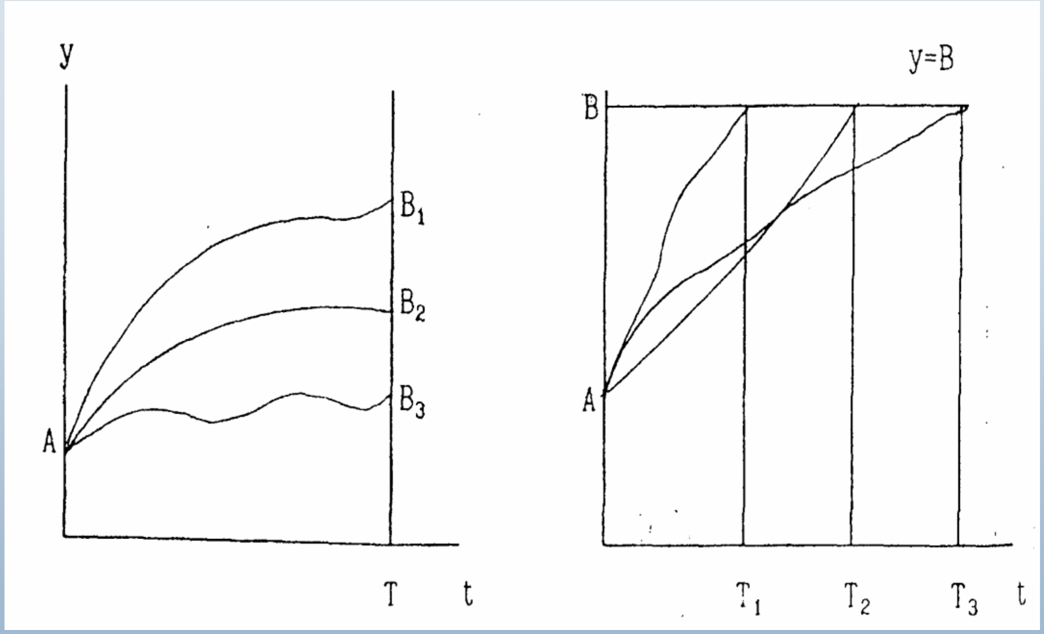
Если R или C могут меняться с течением времени:

$$V = \int_0^5 \Pi(t, P, P')dt.$$

Переменные граничные значения

В предыдущих примерах мы считали, что есть начальная точка **A** и конечная точка допустимого пути, точка **B**. Предложение о заданности начальной точки необходимо, так как оптимальный путь должен начинаться с некоторой определенной заранее позиции. Конечное положение необязательно. Например, можно считать строго заданным конечное значение времени T, а значение переменной состояния y(t) не фиксировать.

В таких задачах экономист получает большую свободу в выборе оптимального пути и, следовательно, может добиться лучшего или , по крайней мере, не худшего оптимального значения функционала V^* по сравнению с задачами, где конечная точка строго задана.



Условие трансверсальности

В задачах со свободными граничными условиями исследователь имеет большую свободу выбора, чем в задачах с фиксированными граничными условиями. Но отсюда следует, что для выбора оптимального решения придется использовать дополнительные ограничения. Такие условия называются **трансверсальными условиями**. Обычно они означают, что оптимальная кривая пересекает заданные граничные кривые под прямым углом.

Три подхода к решению задач динамической оптимизации

1. Вариационное исчисление

Вариационное исчисление возникло в конце XVII века в трудах Исаака Ньютона и братьев Бернулли. Задача вариационного исчисления в общем виде формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} V[y] = \int_0^T F(t, y(0), y'(t))dt \\ y(0) = A \quad (A - дано) \\ y(T) = B \quad (TиB - даны) \end{cases}$$

Такая задача с единственной переменной состояния y, фиксированными начальными и конечными значениями известна как основная задача вариационного исчисления. Мы будем предполагать, что все функции участвующие в формуле непрерывные и непрерывно дифференцируемые. Это необходимо, так как методы вариационного исчисления полностью основаны на классическом дифференциальном исчислении.

Три подхода к решению задач динамической оптимизации

2. Теория оптимального управления

В теории оптимального управления, кроме переменной времени **t** и переменной состояния y(t), вводится еще переменная управления **u(t).** Переменная управляющая задается на основе уравнения.

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

Если удается найти оптимальное управление **u*(t),** то оптимальная кривая **y*(t)** находится интегрированием уравнения движения.

$$\begin{cases} V[u] = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt \\ \textit{при условии} \\ y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(0) = A \quad (A - \textit{дано}) \\ y(T) = B \quad (T \textit{и} B - \textit{даны}) \end{cases}$$

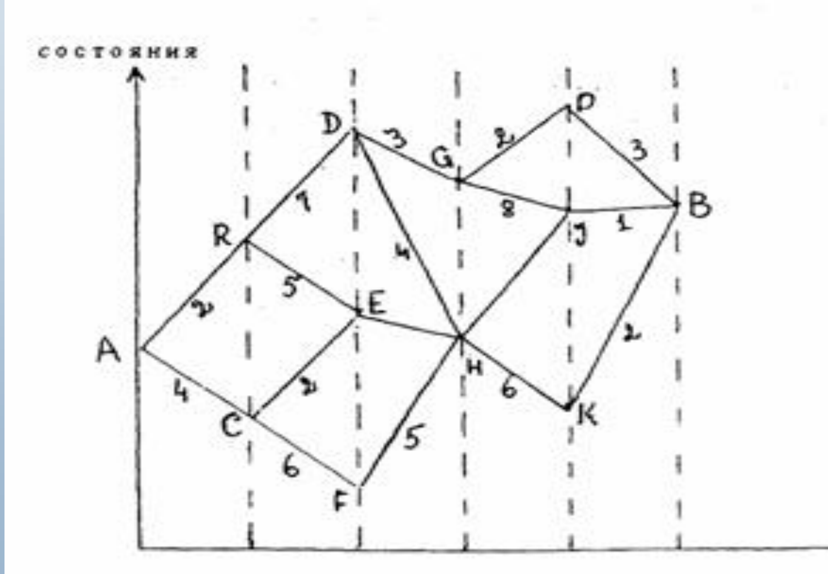
Три подхода к решению задач динамической оптимизации

3. Динамическое программирование

Основы динамического программирования были заложены американским математиком Р. Беллманом в 1957 году. Идея принципа оптимальности Беллмана в том, что если мы решим проблему нахождения оптимального пути, начиная с некоторой промежуточной стадии, то это решение является частью общего оптимального пути. По сути дела Беллман предложил алгоритм последовательного решения оптимизационной задачи.

Возьмем, например, оптимальный путь, начиная со стадии 3. Этот путь HJB с $V^*=5$ или GPB с $V^*=5$.

Полное изложение метода динамического программирования включает случай непрерывного времени.



Основы вариационного исчисления

Рассмотрим семейство соседних кривых проходящих через точки (0,A) и (T,B), которое образуем путем возмущения оптимальной кривой *y*(t)* на величину $\varepsilon\rho(t)$, то есть у нас есть вот такое уравнение: $y(t) = y^*(t) + \varepsilon\rho(t)$

При этом, мы предполагаем следующее: $\rho(0) = \rho(t) = 0$

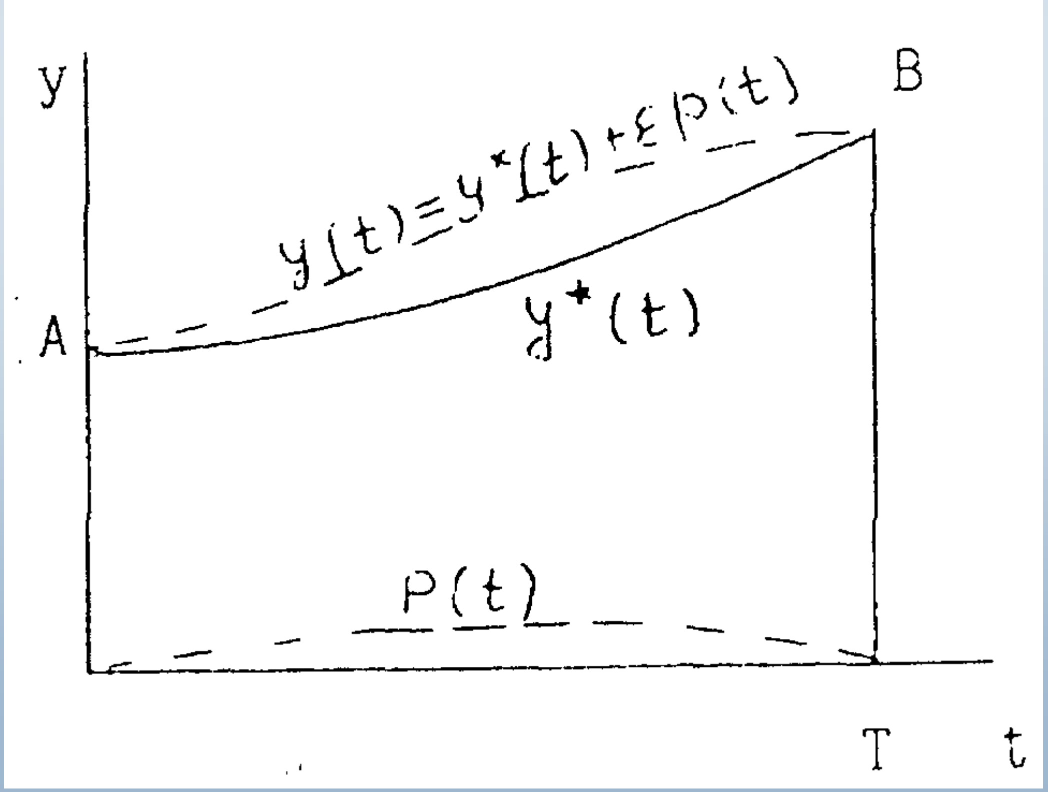
ε - некоторое малое число. Для того, что бы найти экстремум V,

$$V[y] = \int_0^T y(\varepsilon, y(0), y'(t), \rho(t))d$$

нужно найти производную

$$\left.\frac{dV}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Это условие будет необходимым для нахождения экстремали. Но у нас есть две произвольные величины.



Основы вариационного исчисления

Вспомогательные формулы из математического анализа:

Формулой Лейбница в интегральном исчислении называется правило дифференцирования под знаком интеграла, который зависит от параметра, и пределы интеграл также зависят от переменной дифференцирования. Формула названа в честь немецкого математика Готфрида Лейбница.

Пусть у нас есть определенный интеграл: $I(x) = \int_a^b F(t,x)dt,$

Тогда производная будет выглядеть так: $\frac{dI}{dx} = \int_a^b F_x(t,x)dt.$

Если пределы интегрирования a и b считать переменными, то: $J(b,a) = \int_a^b F(t,x)dt,$ $\Rightarrow$

$$\frac{dJ}{db} = F(b,x),$$

$$\frac{dJ}{da} = -F(a,x).$$

В общем случае:

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,\ y)\, dx + f(b(y),\ y) b'(y) - f(a(y),\ y) a'(y).$$

Основы вариационного исчисления

Вывод уравнения Эйлера

В нашем случае: $$V(\varepsilon)=\int_0^T F[t, y^*(t)+\varepsilon\rho(t), \underbrace{y^{*\prime}(t)+\varepsilon\rho'(t)}_{y'(t)}]dt,$$

Используя правило Лейбница и правило дифференцирования сложной функции получим следующее выражение:

$$\frac{dV}{d\varepsilon}=\int_0^T \frac{dF}{d\varepsilon}dt=\int_0^T[(\frac{dF}{dy})\times(\frac{dy}{d\varepsilon})+(\frac{dF}{dy'})\times(\frac{dy'}{d\varepsilon})]dt=\int_0^T[F_y\rho(t)+F_{y'}\rho'(t)]dt,$$

Дома проделать полный вывод уравнения.

Последняя часть уравнения распадается на два интеграла: $$\int_0^T F_y\rho(t)dt+\int_0^T F_{y'}\rho'(t)dt=0$$

Мы избавились от переменной ε, но еще осталась произвольная функция.

Основы вариационного исчисления

Вспомогательная формула. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

$$\int_a^b v\,du = \left(vu\Big|_a^b\right) - \int_a^b u\,dv, \qquad (u = u(t), v = v(t)).$$

Пример

Вычислить $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

Основы вариационного исчисления

Сделаем следую замену переменных (что бы использовать формулу (смотри пред. сл.))

$$v = F_{y'} \qquad dv = (\frac{dv}{dt}) \times dt = (\frac{dF_{y'}}{dt}) \times dt \qquad du = (\frac{du}{dt}) \times dt = \rho(t)dt.$$

$$u = \rho(t),$$

Соответственно, граничные условия будут: $a=0$ и $b=T$. Получаем след. уравнение для одного из двух интегралов:

$$\int_0^T F_{y'}\rho'(t)dt = [F_{y'}\rho(t)]\Big|_0^T - \int_0^T \rho(t)(\frac{dF_{y'}}{dt})dt = -\int_0^T \rho(t)(\frac{dF_{y'}}{dt})dt.$$

В итоге получим следующее:

$$\int_0^T F_y \rho(t)dt + \int_0^T F_{y'}\rho'(t)dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^T \rho(t)\left[F_y - (\frac{dF_{y'}}{dt})\right]dt = 0$$

Основы вариационного исчисления

Так как функция ρ является произвольной функцией, то для того что бы интеграл был равен нулю, необходимо что бы подинтегральное выражение также было бы равно нулю.

$$\int_0^T \rho(t)\left[F_y - \left(\frac{dF_{y'}}{dt}\right)\right]dt = 0$$

Уравнение Эйлера

$$F_y - \left(\frac{dF_{y'}}{dt}\right) = 0$$

Основы вариационного исчисления

Распишем уравнение Эйлера подробнее
(точнее распишем вторую часть уравнения)

$$F_y - \left(\frac{dF_{y'}}{dt}\right) = 0$$

Так как F является функцией трех переменных (t, y, y’), то и частная производная является функцией этих переменных и, следовательно, тоже состоит из трех переменных

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF_{y'}}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF_{y'}}{dy'}\frac{dy'}{dt} = F_{ty'} + F_{yy}y'(t) + F_{y'y'}y''(t)$$

Уравнение Эйлера

$$F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t) - F_y = 0, t \in [0, T]$$

Вариационное исчисление. Пример.

Найти экстремаль функционала $V[y] = \int_0^2 (12ty + y'^2)dt$

с граничными условиями y(0)=0 и y(2)=8

$$F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t) - F_y = 0, t \in [0,T]$$

В начале находим производные

$F_t = 12y \Rightarrow F_{ty'} = 0$ $\quad F_y = 12t \Rightarrow F_{yy'} = 0$

$F_{y'} = 2y \Rightarrow F_{y'y'} = 0$ $\quad F_y = 12t$

2y''-12t=0 или y''(t)=6t. $\Rightarrow$ **$y(t)=t^3+C_1t+C_2$ (общее решение).**

Вариационное исчисление. Пример.

Найти экстремаль функционала $V[y]=\int_1^2 (t^2 y' + t y'^2)dt$

Самостоятельно получаем уравнение

ty”+t+y’=0

Самостоятельно решаем уравнение

$$y = c*\ln(t) + t^2/4 + d$$

$$F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t) - F_y = 0, t \in [0,T]$$

LINIS INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!