

Математические модели в экономике.

Кольцов С.Н
2014

www.linis.ru

Виды моделей

Математические модели экономических систем строятся для достижения одной из двух целей:

1. **Теоретические** модели предназначены для изучения общих закономерностей и свойств экономических систем.
2. **Прикладные** модели строятся для выработки конкретных рекомендаций при принятии практических решений и носят, как правило, оптимизационный характер.

По масштабу моделируемой системы модели делятся на:

1. **Макроэкономические** модели. Такие модели описывают экономику государства или экономико-географического региона в целом, связывая между собой укрупненные показатели: валовой национальный продукт, национальный доход, инфляцию, уровень занятости и т.п.
2. **Микроэкономические** модели. В них моделируемой системой является небольшая часть макроэкономической системы, чаще всего отдельное предприятие или его подразделение. Эти модели обычно носят оптимизационный характер и являются смешанными (полуэмпирическими).

Пример макроэкономических моделей

ОДНОСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ СОЛОУ С ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ КОББА-ДУГЛАСА

Функцию, устанавливающую зависимость между использованными в процессе производства ресурсами и выпуском продукции, называют **производственной функцией**, и обозначают буквой z . Для обозначения капитала и труда здесь использованы первые буквы немецкого слова Kapital (капитал) и английского слова Labour (труд).

$$z = aK^m L^n$$

$$Z = aK^m L^{1-m} = aK^m (L_0 e^{vt})^{1-m} =$$

$$= aL_0 e^{vt} \left[\left(\frac{K_0^{1-m}}{L_0^{1-m}} - \frac{a(1-\rho)}{v+\mu} \right) e^{-(1-m)(v+\mu)t} + \frac{a(1-\rho)}{v+\mu} \right]^{\frac{m}{1-m}}.$$

Пример макроэкономических моделей



Схема кругооборота расходов и доходов

Пример микроэкономических моделей

МОДЕЛИ ЭВАНСА УСТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ НА РЫНКЕ ОДНОГО ТОВАРА

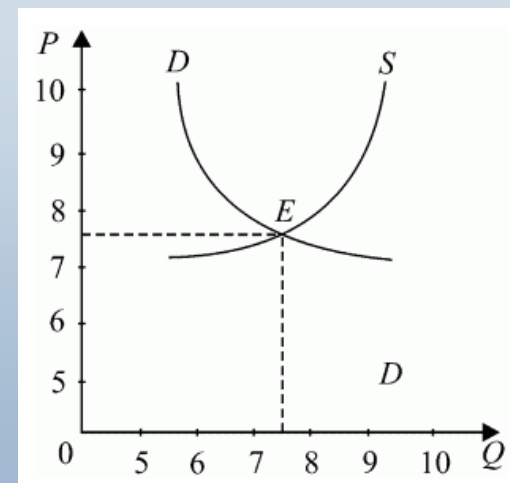
Цена товара выражается через спрос и предложение следующим образом:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(D(t) - S(t))$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(b + d)p + \gamma(c - a)$$

предельная равновесная цена

$$p^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(p_0 - \frac{c - a}{b + d} \right) e^{-\gamma(b + d)t} + \frac{c - a}{b + d} \right] = \frac{c - a}{b + d}$$

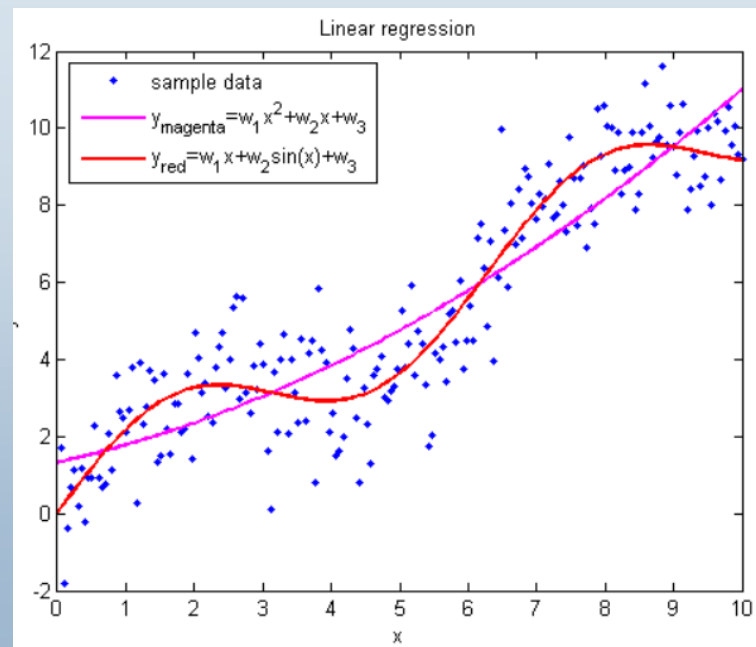


Статические и динамические модели.

По характеру зависимости от времени математические модели делятся на **статические модели**, характеристики которых не изменяются во времени и **динамические** – с переменными во времени характеристиками.

Математическое описание **динамических моделей экономики** производится с помощью систем дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также систем обыкновенных алгебраических уравнений.

Примером статической модели может служить регрессионная модель или кластерный анализ.



Неопределенность экономико-математические модели

При теоретическом моделировании эта неопределенность остается за рамками исследования, т.к. целью моделирования является выявление как раз наиболее общих, осредненных закономерностей.

При построении прикладных моделей неопределенность характеристик либо изначально закладывается в модель, либо ее необходимо держать "в уме" и понимать, что результат моделирования – это лишь наиболее вероятный вариант.

При построении различных эмпирических (и смешанных) моделей надо учитывать еще одно обстоятельство, известное технарям, но забываемое экономистами. Оно заключается в том, что эмпирические закономерности, вообще говоря, нельзя экстраполировать (продолжать за пределы диапазона, охваченного экспериментальным исследованием), так как в неизученной области могут проявить себя принципиально иные эффекты, не характерные для уже исследованной области изменения факторов процесса.

Этапы построения экономико – математических моделей

Постановка задачи:

1. Определяется объект исследования.
2. Формулируется цель исследования, определяются характеристики системы, которые должна отображать построенная модель.

Формализация:

1. Проводится анализ объекта исследования, определяются его основные структурные и функциональные элементы. Выявляются наиболее существенные характеристики этих элементов, выделяются **параметры модели** (характеристики, которые должны быть известны для построения модели) и **переменные модели**, которые должны быть определены в результате моделирования.

Производится математическое описание взаимосвязей между элементами и характеристиками системы, то есть строится собственно экономико-математическая модель.

Этапы построения экономико – математических моделей

Различают три вида решения математических моделей:

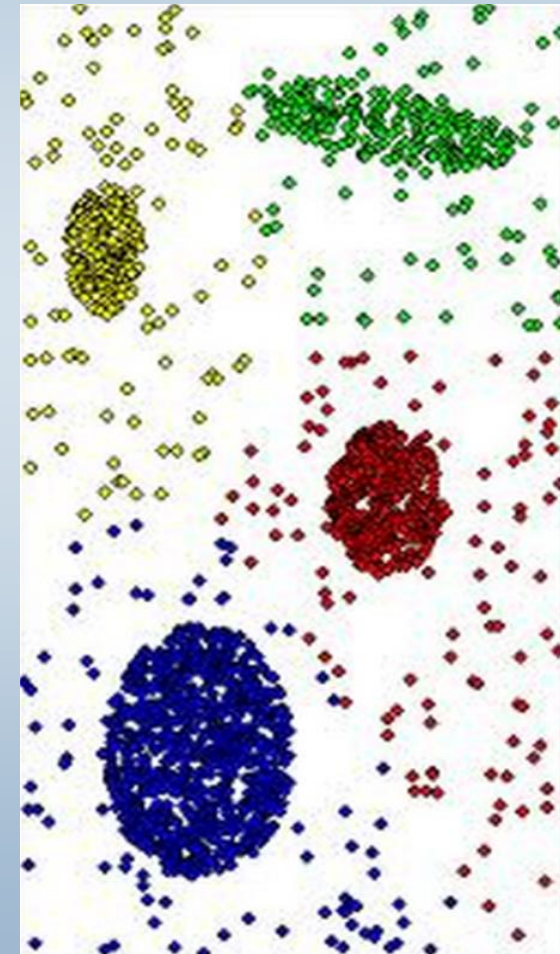
1. Точное, или аналитическое.

2. Приближенное решение получается с некоторой погрешностью, которая не может быть до конца устранена. Например, разложение функций в ряды по степеням малого параметра с сохранением ограниченного числа членов ряда.

3. Численное решение обычно проводится на компьютере. Результат имеет вид не формулы, а числа или таблицы чисел, получаемых в результате выполнения компьютерной программы, реализующей некий алгоритм.

Направления, рассматриваемые к курсу

- **Кластерный анализ.**
Алгоритм K means.
- **Задачи оптимизации (одно и двухмерные задачи).**
Линейное программирование
Задача определения наиболее
прибыльного выпуска продукции.
Транспортная задача.
- **Задачи нелинейного программирования.**
Метод множителей Лагранжа
- **Теория экономического роста.**
Понятие Гамильтониана,
Вариационный метод, принцип Мопертюи



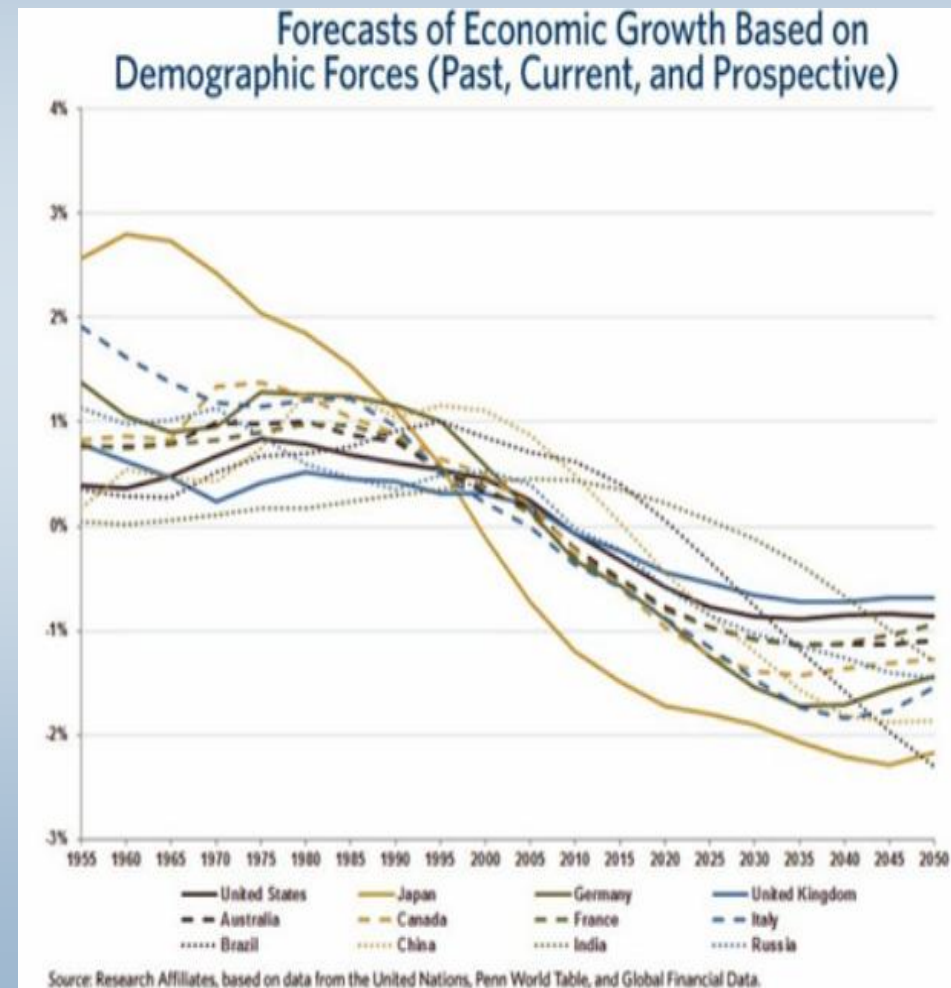
Направления, рассматриваемые к курсу

- **Элементы стохастической математики.**
- **Адаптивные модели прогнозирования (анализ временных рядов).**
 - Модель Брауна** (модель экспоненциального сглаживания). **Модель Хольта.**
Разновидность экспоненциального сглаживания, учитывающая тренд данных
- **Диффузионные модели в экономике.**
 - Модель Басса.
 - Модель Монте-Карло
 - Скачкообразно-диффузионная модель.
- **Модель с обратной связью**
 - Модель Кейнса, операторный метод решения диф. уравн. (преобраз. Лапласа)



Направления, рассматриваемые к курсе

- **Теории графов**
(использование NodeXL).
- **Математическая модель роста ВВП и демографическая проблема.** Модель предсказания гражданской войны.



Кластерный анализ

“Кластерный анализ – задача разбиения заданной выборки объектов на непересекающиеся подмножества, называемые кластерами так, чтобы каждый кластер состоял из схожих объектов, а объекты разных кластеров существенно отличались.”

Решения задач кластеризации используются в таких направлениях как:

1. Статистика
2. Распознавание образов и текстов.
3. Финансовая математика.
4. Выработка стратегии управления.
5. Выделение свойств ДНК.

Для проведения процедуры кластеризации необходимо следующее:

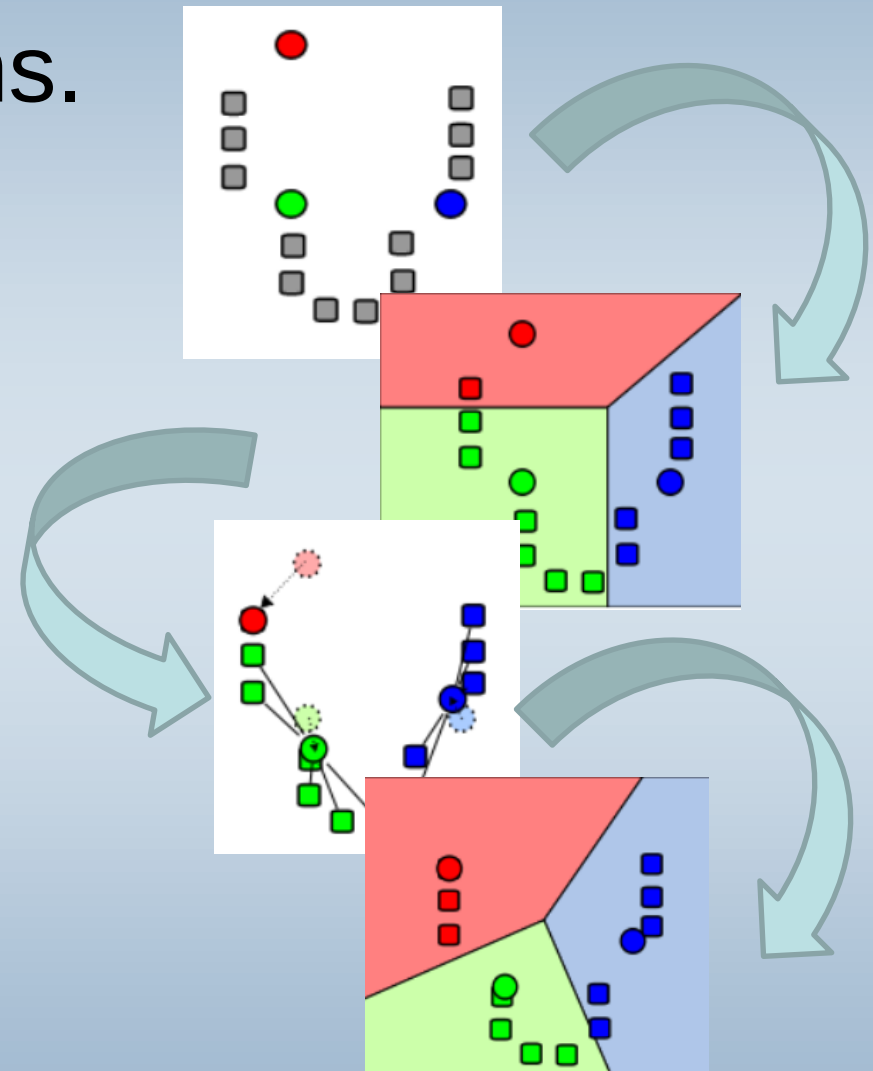
1. Метрика близости. (функция, или набор неравенств), которая необходима для связывания кластером между собой.
2. Число кластеров, порог отсечения. Эти параметры являются входными параметрами алгоритма и необходимы для остановки расчета.

Алгоритм K means.

Основная суть кластеризации заключается в следующем:

Пусть у нас есть совокупность объектов.

1. Выбираем начальные точки для кластеров.
2. Привязать ближайшие точки к центрам кластеров.
3. Пересчитать центры кластеров, исходя из того, что в кластер были добавлены новые объекты.
4. После того как нашли новые центры кластеризации, снова перераспределяем ближайшие точки по кластерам.



Процесс повторяется до тех пор пока центры кластеров перестанут изменяться.

Метод K means. Меры близости

Евклидово расстояние - наиболее общий тип расстояния. Является геометрическим расстоянием между точками в многомерном пространстве:

$$\rho_e(X_i, X_j) = (\sum_l (x_{il} - x_{jl})^2)^{1/2},$$

где: X_i, X_j - координаты i -го и j -го объектов в k -мерном пространстве;

$x_{il} - x_{jl}$ - величина l -той компоненты у i -го (j -го) объекта ($l=1,2,\dots,k$; $i,j=1,2,\dots,n$).

Квадрат евклидова расстояния - используется, чтобы придать большие веса более отдаленным друг от друга объектам:

$$\rho_{ke}(X_i, X_j) = \sum_l (x_{il} - x_{jl})^2$$

Метод K means. Меры близости

Расстояние city-block (городских кварталов) или манхэттенское расстояние - по сравнению с евклидовым расстоянием влияние отдельных больших разностей (выбросов) уменьшается, так как они не возводятся в квадрат:

$$\rho_{cb}(X_i, X_j) = \sum_l |x_{il} - x_{jl}|,$$

где: X_i, X_j - координаты i -го и j -го объектов в k -мерном пространстве;
 $x_{il} - x_{jl}$ - величина l -той компоненты у i -го (j -го) объекта ($l=1,2,\dots,k$;
 $i,j=1,2,\dots,n$).

Выбор числа кластеров – проблема остановки расчета

Задачу кластеризации можно ставить как задачу дискретной оптимизации: необходимо так приписать номера кластеров u_i объектам x_i , чтобы значение выбранного функционала качества приняло наилучшее значение. Существует много разновидностей функционалов качества кластеризации, но нет «самого правильно го» функционала

Среднее внутрикластерное расстояние должно быть как можно меньше:

$$F_0 = \frac{\sum_{i < j} [y_i = y_j] \rho(x_i, x_j)}{\sum_{i < j} [y_i = y_j]} \rightarrow \min .$$

Среднее межкластерное расстояние должно быть как можно больше:

$$F_1 = \frac{\sum_{i < j} [y_i \neq y_j] \rho(x_i, x_j)}{\sum_{i < j} [y_i \neq y_j]} \rightarrow \max .$$

Выбор числа кластеров – проблема остановки расчета

Если алгоритм кластеризации вычисляет центры кластеров μ_y , $y \in Y$, то можно определить функционалы, вычислительно более эффективные. Сумма средних внутрикластерных расстояний должна быть как можно меньше:

$$\Phi_0 = \sum_{y \in Y} \frac{1}{|K_y|} \sum_{i: y_i = y} \rho^2(x_i, \mu_y) \rightarrow \min,$$

где $K_y = \{x_i \in X \mid$

$y_i = y\}$ — кластер с номером y . В этой формуле можно было бы взять не квадраты расстояний, а сами расстояния. Однако, если ρ — евклидова метрика, то внутренняя сумма в Φ_0 приобретает физический смысл момента инерции кластера K_y относительно его центра масс, если рассматривать кластер как материальное тело, состоящее из $|K_y|$ точек одинаковой массы.

Сумма межкластерных расстояний должна быть как можно больше:

$$\Phi_1 = \sum_{y \in Y} \rho^2(\mu_y, \mu) \rightarrow \max,$$

Теория скачков - *Алгоритм Сьюгер-Джеймса*

Для решения этой проблемы существует непараметрический метод, предложенный Sugar and James, который позволяет трансформировать функцию качества так, чтобы перегиб или скачок стал явно видимым. Метод основан на использовании понятия «искажений» (**distortion**), которые являются оценками дисперсии внутри класса (кластера).

В ходе реализации данного метода рассчитывается специальная функция (distortion function), которая определяется на основе трех параметров:

1. **Distortion** для заданного кластерного решения.
2. **Количество кластеров** для заданного кластерного решения.
3. **Коэффициент преобразования**. Затем производится преобразование **distortion** в **transformed distortion**, на основе коэффициента преобразования. В конце производится анализ поведения **transformed distortion function** в зависимости от числа кластеров. На основании анализа делается вывод о том, какое кластерное решение наилучшее.

Теория скачков - *Алгоритм Сьюгер-Джеймса*

- 1. Определение минимального искажения (distortion).** В качестве минимального искажения берется минимальное значение внутрикластерной дисперсии, встречающееся в данном кластерном решении. Это значит следующее: для заданного кластерного решения (например, для 5 кластеров) рассчитываются дисперсии внутри каждого кластера (среднее внутрикластерное расстояние). Из этого множества чисел (5 штук в 5-кластерном решении) выбирается минимальное значение d .
- 2. Коэффициент трансформации.** Согласно разработчикам метода, в качестве коэффициента трансформации можно взять величину $Y=P/2$, где P – размерность векторного пространства. В качестве коэффициента также можно взять величину $1/K$, где K – число кластеров.
- 3. Transformed distortion.** Данная величина рассчитывается следующим образом:

$$D_t(K) = d^Y(K)$$

Теория скачков - Алгоритм Сьюгер-Джеймса

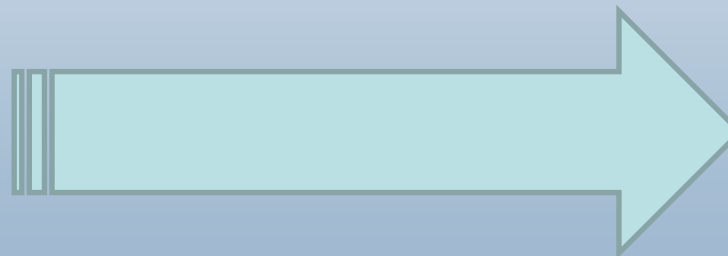
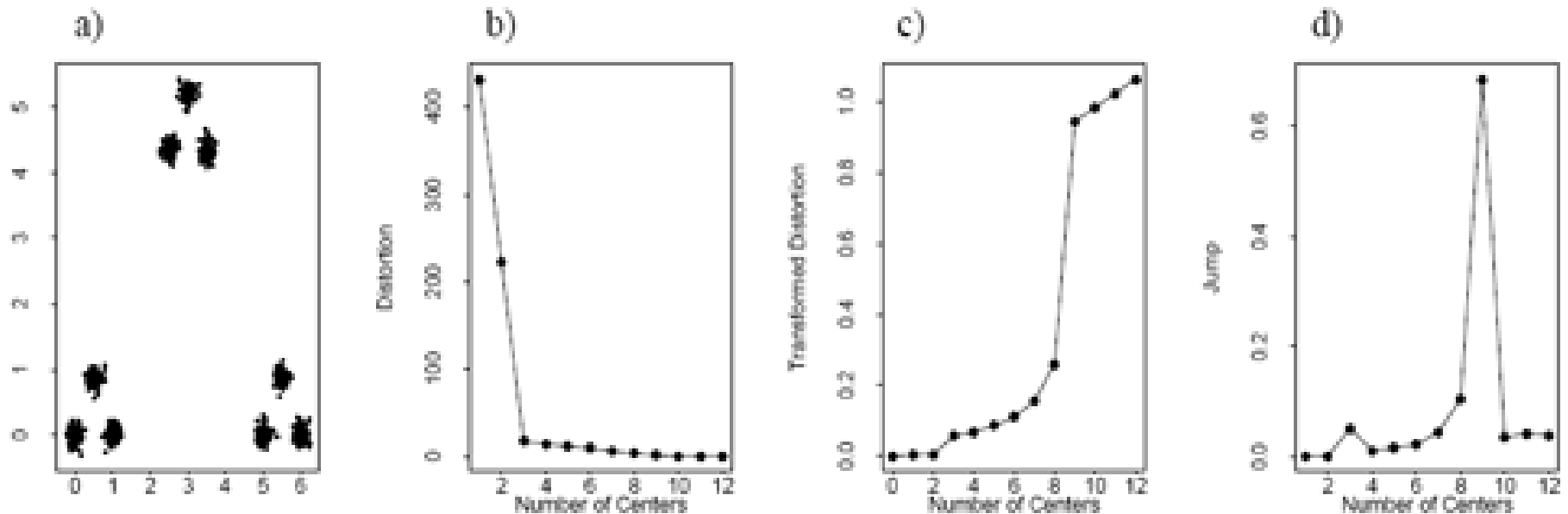
4. **Расчет скачков ('Jumps')**. Оценка поведения функции transformed distortion основана на оценке скачков функции, которые происходят при изменении числа кластеров. Скачок рассчитывается следующим образом:

$$J_K = d_K^{-Y} - d_{K-1}^{-Y}$$

Процедура определения количества кластеров состоит из следующих шагов:

1. Запускается k-means алгоритм для K кластеров и определяется соответствующее "искажение" $\hat{d}_k$. Для различных значений K строится набор $\hat{d}_k$.
2. Выбирается степень трансформации $Y > 0$ (обычно принимается $Y = p/2$).
3. Вычисляются скачки по формуле $J_k = \hat{d}_k^{-Y} - \hat{d}_{k-1}^{-Y}$.
4. За итоговое количество кластеров выбирается то, которое соответствует наибольшему скачку $K^* = \arg \max_k J_k$.

Теория скачков - Алгоритм Сьюгер-Джеймса



THANK YOU!

← → ↻ www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html



[Главная](#)

[О нас](#)

[События](#)

[Публикации](#)

[Исследования](#)

[Материалы](#)

[Ссылки](#)

[Контакты](#)

ENGLISH


Новости



Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИНИс в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИНИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радзев).

[Подробнее...](#)



ЛИНИс – участник Балтийского партнерства по новым медиа

13.05.2012



Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИНИс).

[Подробнее...](#)

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция