

Задачи оптимизации.

Кольцов С.Н
2014

www.linis.ru

Задачи линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. **Потому что:**

1. Математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
2. Для линейных задач разработаны специальные численные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на ЭВМ;
3. Некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Таким образом, **Линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

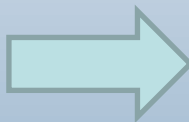
(ЗЛП).

Математическая задача в общем виде состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $F(x_1, x_2, x_3 \dots)$ при условии что $a_i(x_1, x_2, x_3 \dots) \leq b_i$, F , a_i – заданные функции, b_i – некоторые действительные числа.

Если функции F , a_i – линейные задача является задачей линейного программирования, а если не линейные (хотя бы из одна из функций), то данная задача является не линейной. Функция $F(x_1, x_2, x_3 \dots)$ - называется **целевой функцией** от переменных $x_1, x_2, x_3 \dots$.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

Система прямых ограничений



Вектор X называется планом или допустимым решением ЗЛП.

[illegible]

Пример задачи.

Ресурс	Мужской костюм	Женский костюм	Ограничение ресурса
Труд (чел. - день)	1	1	150
Сырье 1 (метр ткани, шерсть)	3.5	1	350
Сырье 2 (метр ткани, лавсан)	0.5	2	240

Вопрос. Сколько нужно сшить костюмов, так что бы максимизировать прибыль? При том, что прибыль от одного женского костюма составляет 10\$, а прибыль от мужского костюма – 20\$. При этом нужно сшить не менее 60 мужских костюмов.

Пусть x_1 – число женских костюмов, x_2 – число мужских костюмов. Нам нужно максимизировать функцию:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \sim \max$$

Экономико – математическая модель задачи

Ресурс	Мужской костюм	Женский костюм	Ограничение ресурса
Труд (чел. - день)	1	1	150
Сырье 1 (метр ткани, шерсть)	3.5	1	350
Сырье 2 (метр ткани, лавсан)	0.5	2	240

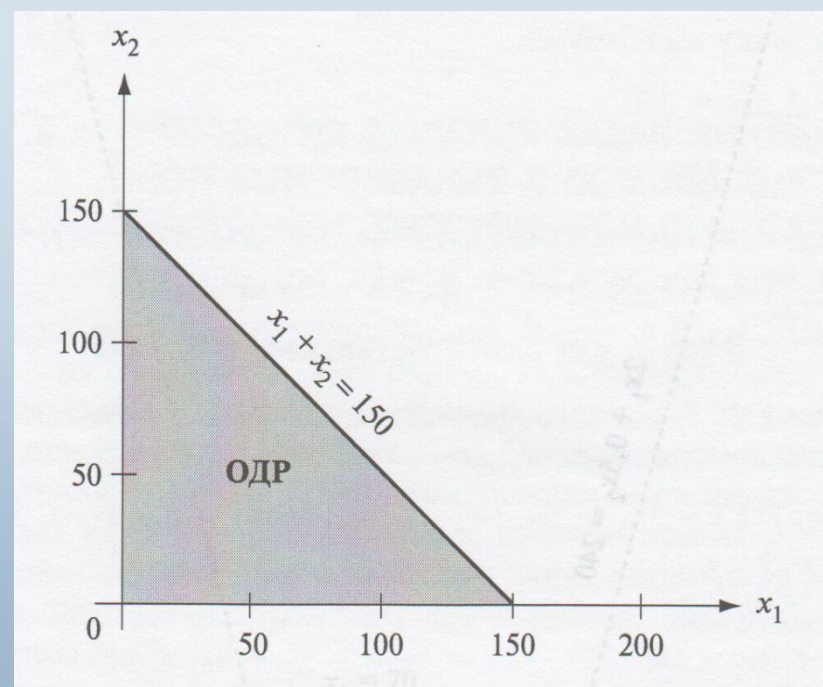
Ограничение задачи

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 150, \\ 2x_1 + 0,5x_2 &\leq 240, \\ x_1 + 3,5x_2 &\leq 350, \\ x_2 &\geq 60, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Первое ограничение по труду

$$x_1 + x_2 \leq 150.$$

ОДР – область допустимых решений



Графическое решение задачи

1. Ограничение по лавсану

$$2x_1 + 0.5x_2 \leq 240$$

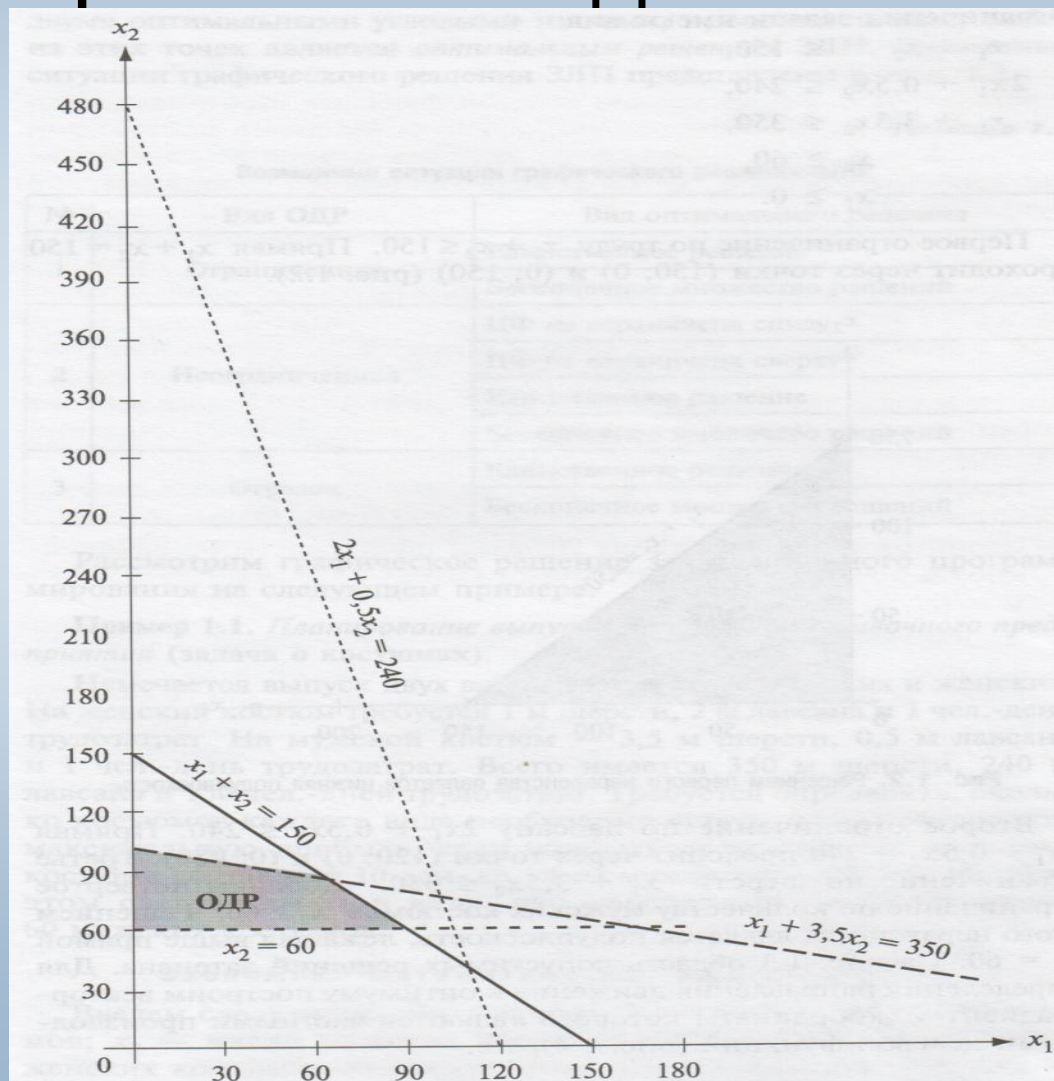
2. Ограничение по шерсти

$$x_1 + 3.5x_2 \leq 350$$

2. Ограничение по количеству мужских костюмов

$$x_1 \geq 60$$

Область допустимых значений при всех ограничениях – затемненная область.



Графическое решение задачи

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка (или набор точек) из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя точка (ну или нижняя точка) в направлении наискорейшего роста.

Для нахождения экстремального значения целевой функции используется вектор – градиент, координаты которого являются производными целевой функции.

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right).$$



$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right) = (10; 20).$$

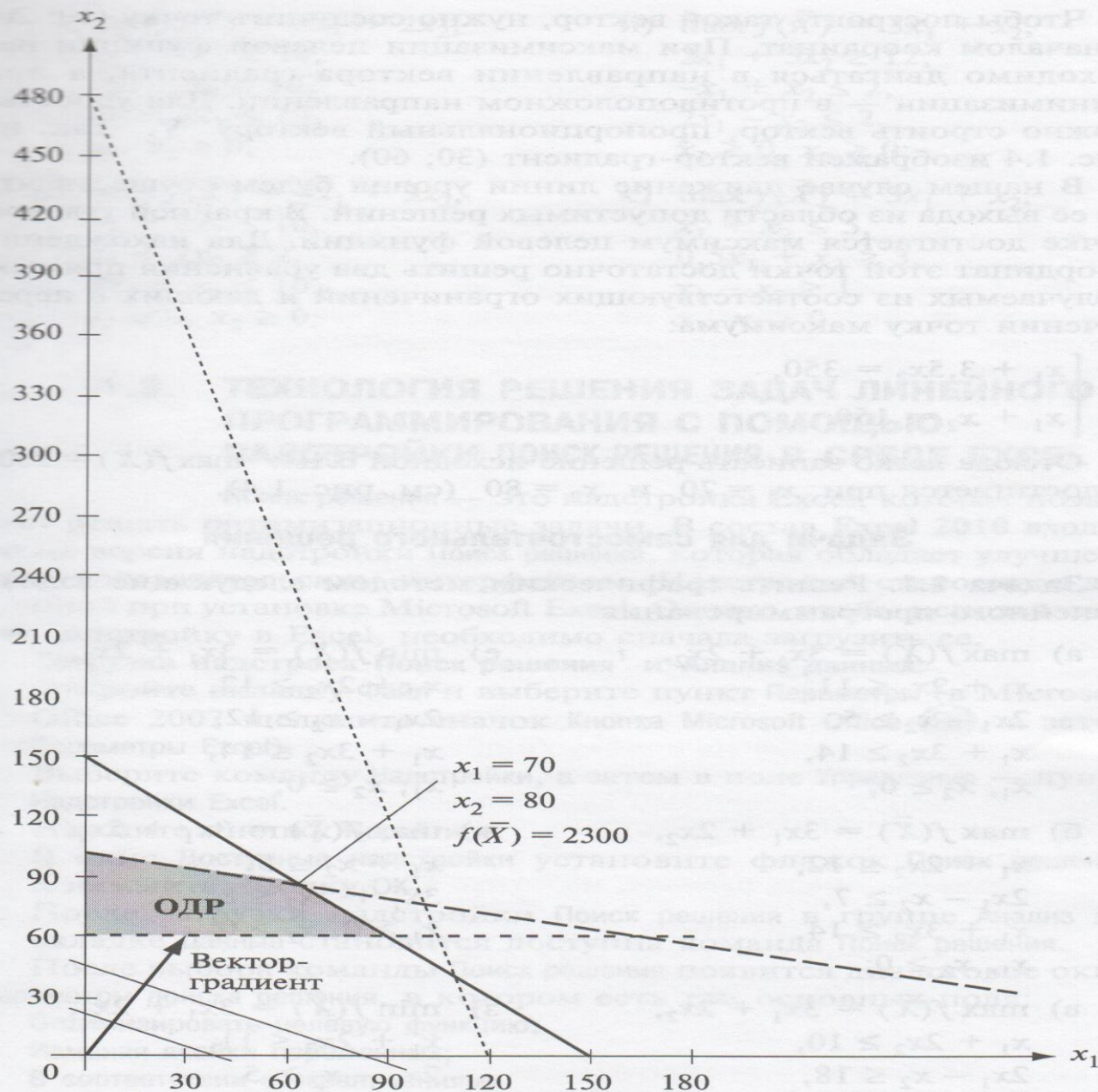
Нужно строить вектор с координатами: 0,0 – 10,20

Итоговое решение
Это точка с
координатами:

$$x_1 = 70$$

$$x_2 = 80$$

Максимум целевой
Функции: $F=2300$



Реализация задачи максимизации прибыли в Excel

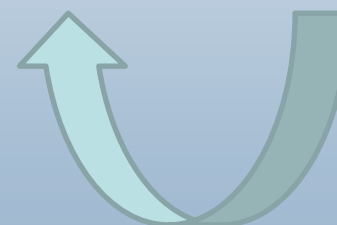
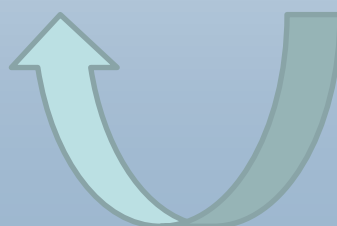
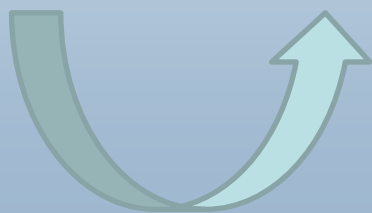
1. Необходимо ввести исходные данные на странице Excel.

	A	B	C	D	
1	x1	x2			
2					
3	10	20	0		
4	1	3,5	0	350	
5	2	0,5	0	240	
6	1	1	0	150	
7	0	1	0	60	
8					

Шерсть.
Лавсан.
Труд.
Огранич по колл.

Данные по жен. кост.

Данные по муж. кост.



Реализация задачи максимизации прибыли в Excel

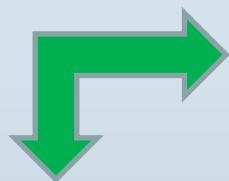
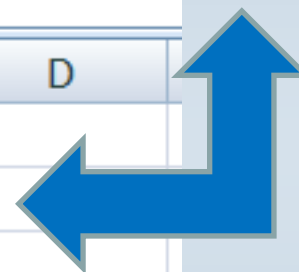
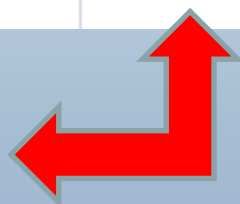
2. Определение зависимостей и целевой функции.

Синяя ячейка –
целевая функция

	G12		fx	
	A	B	C	D
1	x1	x2		
2				
3	10	20	0	
4	1	3,5	0	350
5	2	0,5	0	240
6	1	1	0	150
7	0	1	0	60
8				

Зеленые
ячейки –
варьируемые
переменные

Красные ячейки –
зависимости для ограничений

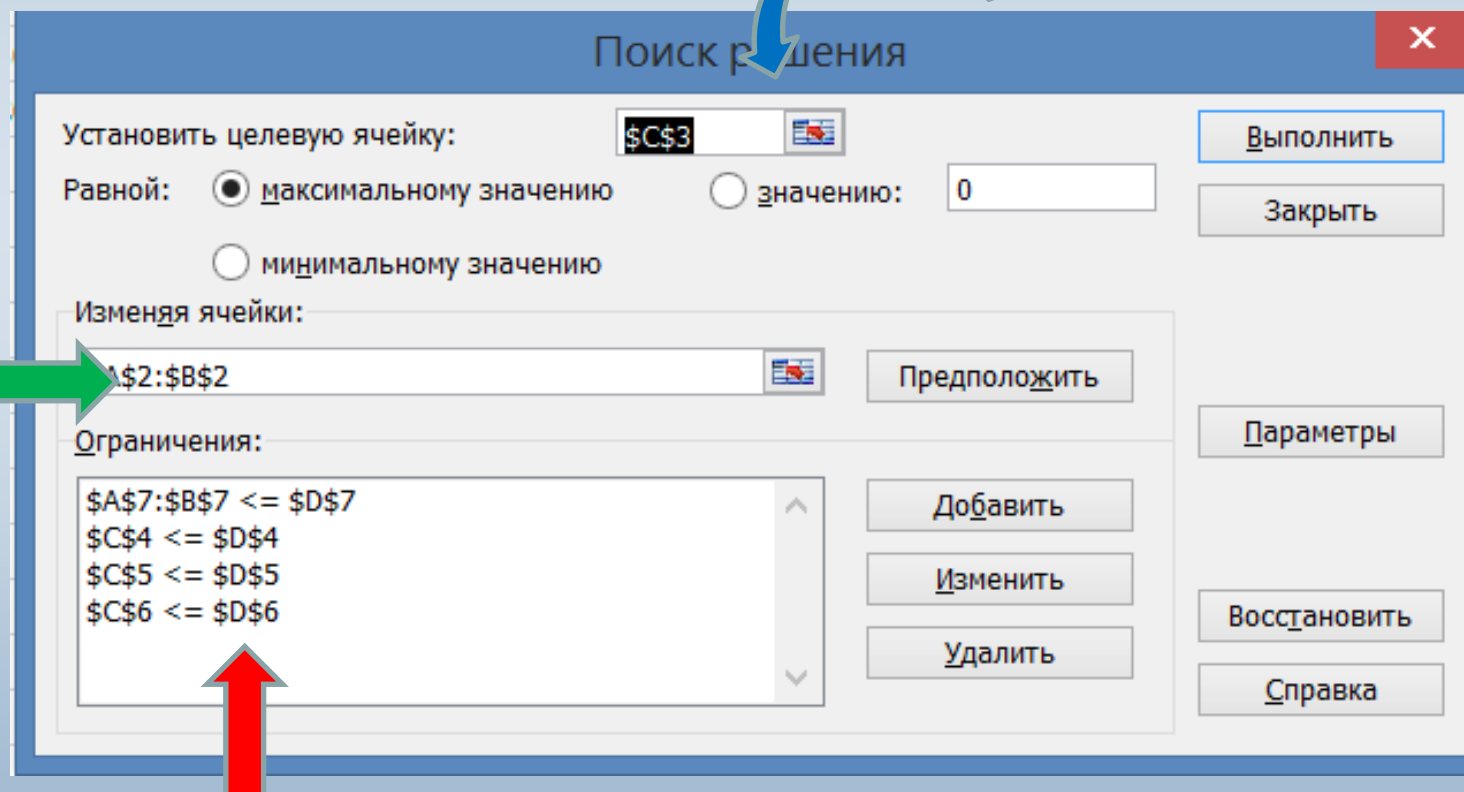


Реализация задачи максимизации прибыли в Excel

3. Оптимизация целевой функции.

Задание ячейки с целевой
функцией

Ячейки
с измен.
Перемен.



The image shows the 'Поиск решения' (Solver) dialog box in Excel. The 'Установить целевую ячейку:' (Set Objective) field contains '\$C\$3'. The 'Равной:' (To: Of) section has the 'максимальному значению' (to Max) radio button selected. The 'Изменяя ячейки:' (By Changing Variable Cells) field contains '\$2:\$B\$2'. The 'Ограничения:' (Constraints) list contains four constraints: '\$A\$7:\$B\$7 <= \$D\$7', '\$C\$4 <= \$D\$4', '\$C\$5 <= \$D\$5', and '\$C\$6 <= \$D\$6'. The dialog box has buttons for 'Выполнить' (Solve), 'Закреть' (Load/Save), 'Параметры' (Options), 'Восстановить' (Reset All), 'Справка' (Help), 'Предположить' (Guess), 'Добавить' (Add), 'Изменить' (Change), and 'Удалить' (Delete).

Задание ограничений

Реализация задачи максимизации прибыли в Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H																																				
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам																																											
2	Рабочий лист: [ЗЛП_2.xlsx]Лист1																																											
3	Отчет создан: 17.04.2014 11:16:25																																											
4																																												
5																																												
6	Целевая ячейка (Максимум)																																											
7	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Результат</th></tr><tr><td>\$C\$3</td><td></td><td>0</td><td>2300</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	\$C\$3		0	2300																												
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат																																									
\$C\$3		0	2300																																									
8																																												
9																																												
10																																												
11	Изменяемые ячейки																																											
12	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Результат</th></tr><tr><td>\$A\$2</td><td>x1</td><td>0</td><td>70</td></tr><tr><td>\$B\$2</td><td>x2</td><td>0</td><td>80</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	\$A\$2	x1	0	70	\$B\$2	x2	0	80																								
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат																																									
\$A\$2	x1	0	70																																									
\$B\$2	x2	0	80																																									
13																																												
14																																												
15																																												
16																																												
17	Ограничения																																											
18	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Значение</th><th>Формула</th><th>Статус</th><th>Разница</th></tr><tr><td>\$C\$4</td><td></td><td>350</td><td>\$C\$4<=\$D\$4</td><td>связанное</td><td>0</td></tr><tr><td>\$C\$5</td><td></td><td>180</td><td>\$C\$5<=\$D\$5</td><td>не связан.</td><td>60</td></tr><tr><td>\$C\$6</td><td></td><td>150</td><td>\$C\$6<=\$D\$6</td><td>связанное</td><td>0</td></tr><tr><td>\$A\$7</td><td>x1</td><td>0</td><td>\$A\$7<=\$D\$7</td><td>не связан.</td><td>60</td></tr><tr><td>\$B\$7</td><td>x2</td><td>1</td><td>\$B\$7<=\$D\$7</td><td>не связан.</td><td>59</td></tr></table>								Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	\$C\$4		350	\$C\$4<=\$D\$4	связанное	0	\$C\$5		180	\$C\$5<=\$D\$5	не связан.	60	\$C\$6		150	\$C\$6<=\$D\$6	связанное	0	\$A\$7	x1	0	\$A\$7<=\$D\$7	не связан.	60	\$B\$7	x2	1	\$B\$7<=\$D\$7	не связан.	59
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница																																							
\$C\$4		350	\$C\$4<=\$D\$4	связанное	0																																							
\$C\$5		180	\$C\$5<=\$D\$5	не связан.	60																																							
\$C\$6		150	\$C\$6<=\$D\$6	связанное	0																																							
\$A\$7	x1	0	\$A\$7<=\$D\$7	не связан.	60																																							
\$B\$7	x2	1	\$B\$7<=\$D\$7	не связан.	59																																							
19																																												
20																																												
21																																												
22																																												
23																																												
24																																												



Результат оптимизации
целевой функции



Прогноз выпуска продукции

Транспортная задача в терминах линейного программирования

Пусть у нас есть m поставщиков, соответственно есть a_i количество товаров ($i=1\dots m$). Есть n потребителей, которые хотели бы получить b_j товаров. Стоимость перевозки товара от поставщика к потребителю равна c_{ij} .

Пусть количество груза x_{ij} , которое нужно перевезти от поставщика i к потребителю j . Соответственно стоимость перевозки груза x_{ij} , будет равна $c_{ij} x_{ij}$.

Задача: нужно минимизировать общие затраты на перевозку товара от поставщика к потребителю.

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Транспортная задача в терминах линейного программирования

Необходимо найти все x_{ij} , Z – стоимость плана.

Ограничения можно найти из следующих условий.

Все грузы должны быть перевезены.

Все потребители должны быть
удовлетворены.

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Транспортная задача в терминах линейного программирования

Полная формулировка транспортной задачи

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

- минимальное значение

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

Запасы равны потребностям

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Пример транспортной задачи

Пуст у нас есть три фермерских хозяйства и 5 точки для продажи.

Фермерск ие хозяйства	Магазин. 1	Магазин. 2	Магазин. 3	Магазин. 4	Магазин. 5	Запас молока
Фермер 1	7	6	8	10	12	60
Фермер 2	9	5	7	4	6	60
Фермер 2	6	8	4	9	7	50
Потребно сть в молоке	30	20	55	20	25	

Красный цвет: - производство молока

Зеленый цвет: - стоимость перевозки

Решение транспортной задачи в Excel

Нам нужно
минимизировать
следующую
функцию:

$$f(\bar{X}) = 7x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 12x_{15} + \\ + 9x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + \\ + 6x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} + 7x_{35} \rightarrow \min.$$

Ограничение по
поставщикам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 50; \end{cases}$$

Ограничение по
потребителям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25. \end{cases}$$

Решение транспортной задачи в Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	фермерские хоз.	M1	M2	M3	M4	M5	Запасы молока
2	Ферм. 1	7	6	8	10	12	60
3	Ферм. 2	9	5	7	4	6	60
4	Ферм. 3	6	8	4	9	7	50
5	потребность в молоке	30	20	55	20	25	

Синим цветом выделена стоимость перевозки молока по магазинам от разных фермеров

Красным цветом выделены запасы молока у фермеров

Зеленым цветом выделены потребности молока в магазинах.

THANK YOU!

← → ↻ www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html



[Главная](#)

[О нас](#)

[События](#)

[Публикации](#)

[Исследования](#)

[Материалы](#)

[Ссылки](#)

[Контакты](#)

ENGLISH



Новости



Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИНИс в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИНИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радзев).

[Подробнее...](#)



ЛИНИс – участник Балтийского партнерства по новым медиа

13.05.2012



Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИНИс).

[Подробнее...](#)

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция