

$$202) \int x^3 \sqrt{X^3} dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2 \sqrt{X^5}}{5}.$$

$$X = x^2 + a^2$$

$$203) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

$$204) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2} x \sqrt{X} + \frac{3}{2} a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2} x \sqrt{X} + \frac{3}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$205) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2} \sqrt{X} - \frac{3}{2} a \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

$$206) \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$$

$$207) \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$208) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln (x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$209) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

$$210) \int \frac{dx}{x \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

$$211) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$$

$$212) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2 x^2 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5} \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 - a^2}$

Обозначение: $X = x^2 - a^2$

$$213) \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} - a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} \right) + C = \frac{1}{2} [x \sqrt{X} - a^2 \ln (x + \sqrt{X})] + C_1.$$

$$214) \int x \sqrt{X} dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$215) \int x^2 \sqrt{X} dx = \frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{X} - a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} [x \sqrt{X} - a^2 \ln (x + \sqrt{X})] + C_1.$$

$$216) \int x^3 \sqrt{X} dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2 \sqrt{X^3}}{3}.$$

$$X = x^2 - a^2$$

$$217) \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$218) \int \frac{\sqrt{X}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \text{Arch} \frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$219) \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$220) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \text{Arch} \frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$221) \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$$

$$222) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \text{Arch} \frac{x}{a} + C = \frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$223) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2 \sqrt{X}.$$

$$224) \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$225) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

$$226) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2 x^2} + \frac{1}{2a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$227) \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} - \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \text{Arch} \frac{x}{a} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} - \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{X}) \right) + C_1.$$

$$228) \int x \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$$

$$229) \int x^2 \sqrt{X^3} dx = \frac{x \sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2 x \sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x \sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \text{Arch} \frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{x \sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2 x \sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4 x \sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$230) \int x^3 \sqrt{X^3} dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2 \sqrt{X^5}}{5}.$$

$$231) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2 \sqrt{X} + a^3 \arccos \frac{a}{x}.$$

$$232) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2} x \sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C = \boxed{X = x^2 - a^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2} x \sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$233) \int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2} a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$234) \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$$

$$235) \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$236) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$$

$$237) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

$$238) \int \frac{dx}{x \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2 \sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \arccos \frac{a}{x}.$$

$$239) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$$

$$240) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2 x^2 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \arccos \frac{a}{x}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Обозначения: $X = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$

$$241) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b) + C & \text{для } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } a > 0, \Delta > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax + b) & \text{для } a > 0, \Delta = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{для } a < 0, \Delta < 0. \end{cases}$$

$$242) \int \frac{dx}{X \sqrt{X}} = \frac{2(2ax + b)}{\Delta \sqrt{X}}.$$

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$$

$$243) \int \frac{dx}{X^2 \sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta \sqrt{X}} \left(\frac{1}{X} + 2k \right).$$

$$244) \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{2(n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

$$245) \int \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b) \sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$246) \int X \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b) \sqrt{X}}{8a} \left(X + \frac{3}{2k} \right) + \frac{3}{8k^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$247) \int X^2 \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b) \sqrt{X}}{12a} \left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2} \right) + \frac{5}{16k^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$248) \int X^{(2n+1)/2} dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{2n+1}{2k(n+1)} \int X^{(2n-1)/2} dx.$$

$$249) \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a} \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$250) \int \frac{x dx}{X \sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta \sqrt{X}}.$$

$$251) \int \frac{x dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} \quad (\text{см. № 244}).$$

$$252) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2} \right) \sqrt{X} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$253) \int \frac{x^2 dx}{X \sqrt{X}} = \frac{(2b^2 - 4ac)x + 2bc}{a\Delta \sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$254) \int x \sqrt{X} dx = \frac{X \sqrt{X}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} \sqrt{X} - \frac{b}{4ak} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{см. № 241}).$$

$$255) \int xX \sqrt{X} dx = \frac{X^2 \sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a} \int X \sqrt{X} dx \quad (\text{см. № 246}).$$

$$256) \int xX^{(2n+1)/2} dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a} - \frac{b}{2a} \int X^{(2n+1)/2} dx \quad (\text{см. № 248}).$$

$$257) \int x^2 \sqrt{X} dx = \left(x - \frac{5b}{6a} \right) \frac{X \sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2 - 4ac}{16a^2} \int \sqrt{X} dx \quad (\text{см. № 245}).$$

$$268) \int \sqrt[n]{ax+b} dx = \frac{n(ax+b)^{\frac{n}{n-1}}}{(n-1)a} \sqrt[n]{ax+b}.$$

$$269) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)a} \sqrt[n]{ax+b}.$$

$$270) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na} \ln \frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$$

$$271) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na} \arccos \frac{a}{\sqrt{x^n}}.$$

$$272) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$$

Рекуррентные формулы для интеграла от биномиального дифференциала

$$\begin{aligned} 273) \int x^m(ax^n+b)^p dx &= \\ &= \frac{1}{m+np+1} \left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb \int x^m(ax^n+b)^{p-1} dx \right], \\ &= \frac{1}{bn(p+1)} \left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1) \int x^m(ax^n+b)^{p+1} dx \right], \\ &= \frac{1}{(m+1)b} \left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1) \int x^{m+n}(ax^n+b)^p dx \right], \\ &= \frac{1}{a(m+np+1)} \left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b \int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx \right]. \end{aligned}$$

1.1.3.3. Интегралы от тригонометрических функций *).

Интегралы, содержащие синус

$$274) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$$

$$275) \int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$$

$$258) \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2\sqrt{cX}}{x} + \frac{2c}{x} + b \right) + C & \text{для } c > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}} + C_1 & \text{для } c > 0, \Delta > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{bx+2c}{x} & \text{для } c > 0, \Delta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{для } c < 0, \Delta < 0. \end{cases}$$

$$259) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{см. № 258}).$$

$$260) \int \frac{\sqrt{X} dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{см. №№ 241 и 258}).$$

$$261) \int \frac{\sqrt{X} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} \quad (\text{см. №№ 241 и 258}).$$

$$262) \int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x} dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2} \int X^{(2n-1)/2} dx + c \int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x} dx.$$

Интегралы, содержащие другие иррациональные выражения

$$263) \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx}} = -\frac{2}{bx} \sqrt{ax^2 + bx}.$$

$$264) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$265) \int \frac{x dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$266) \int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a}.$$

$$267) \int \frac{dx}{(ax^2 + b) \sqrt{fx^2 + g}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{ag - bf}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{ag - bf}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g}} & (ag - bf > 0), \\ \frac{1}{2 \sqrt{b} \sqrt{bf - ag}} \ln \frac{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g} + x \sqrt{bf - ag}}{\sqrt{b} \sqrt{fx^2 + g} - x \sqrt{bf - ag}} & (ag - bf < 0). \end{cases}$$

- 276) $\int \sin^3 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax.$
- 277) $\int \sin^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$
- 278) $\int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \quad (n \text{ целое } > 0).$
- 279) $\int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.$
- 280) $\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cos ax.$
- 281) $\int x^3 \sin ax \, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right) \sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right) \cos ax.$
- 282) $\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad (n > 0).$
- 283) $\int \frac{\sin ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots *$
- 284) $\int \frac{\sin ax}{x^2} \, dx = -\frac{\sin ax}{x} + a \int \frac{\cos ax \, dx}{x} \quad (\text{см. № 322}).$
- 285) $\int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} \, dx \quad (\text{см. № 324}).$
- 286) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \int \operatorname{cosec} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} = \frac{1}{a} \ln (\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax).$
- 287) $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$
- 288) $\int \frac{dx}{\sin^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \sin^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$
- 289) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 1).$

$$290) \int \frac{x dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2} \left(ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127(ax)^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n(ax)^{2n+1} + \dots \right) *).$$

$$291) \int \frac{x dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax.$$

$$292) \int \frac{x dx}{\sin^n ax} = -\frac{x \cos ax}{(n-1)a \sin^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \sin^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n > 2).$$

$$293) \int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$294) \int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$295) \int \frac{x dx}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$296) \int \frac{x dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$297) \int \frac{\sin ax dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right).$$

$$298) \int \frac{dx}{\sin ax(1 \pm \sin ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$299) \int \frac{dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$300) \int \frac{dx}{(1 - \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$301) \int \frac{\sin ax dx}{(1 + \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$302) \int \frac{\sin ax dx}{(1 - \sin ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$303) \int \frac{dx}{1 + \sin^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{3 \sin^2 ax - 1}{\sin^2 ax + 1} \right).$$

$$304) \int \frac{dx}{1 - \sin^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$$

ТАБЛИЦЫ

$$305) \int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}$$

($|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 275).

$$306) \int \frac{dx}{b+c \sin ax} = \frac{2}{a \sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (\text{для } b^2 > c^2),$$

$$= \frac{1}{a \sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c - \sqrt{c^2-b^2}}{b \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + c + \sqrt{c^2-b^2}} \quad (\text{для } b^2 < c^2).$$

$$307) \int \frac{\sin ax dx}{b+c \sin ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b+c \sin ax} \quad (\text{см. № 306}).$$

$$308) \int \frac{dx}{\sin ax(b+c \sin ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b+c \sin ax} \quad (\text{см. № 306}).$$

$$309) \int \frac{dx}{(b+c \sin ax)^2} =$$

$$= \frac{c \cos ax}{a(b^2-c^2)(b+c \sin ax)} + \frac{b}{b^2-c^2} \int \frac{dx}{b+c \sin ax} \quad (\text{см. № 306}).$$

$$310) \int \frac{\sin ax dx}{(b+c \sin ax)^2} =$$

$$= \frac{b \cos ax}{a(c^2-b^2)(b+c \sin ax)} + \frac{c}{c^2-b^2} \int \frac{dx}{b+c \sin ax} \quad (\text{см. № 306}).$$

$$311) \int \frac{dx}{b^2+c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab \sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2+c^2} \operatorname{tg} ax}{b} \quad (b > 0).$$

$$312) \int \frac{dx}{b^2-c^2 \sin^2 ax} = \frac{1}{ab \sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2-c^2} \operatorname{tg} ax}{b} \quad (b^2 > c^2, b > 0),$$

$$= \frac{1}{2ab \sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{c^2-b^2} \operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2-b^2} \operatorname{tg} ax - b} \quad (c^2 > b^2, b > 0).$$

Интегралы, содержащие косинус

$$313) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

$$314) \int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax.$$

$$315) \int \cos^3 ax dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax.$$

$$316) \int \cos^4 ax \, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$$

$$317) \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx.$$

$$318) \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}.$$

$$319) \int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax.$$

$$320) \int x^3 \cos ax \, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \sin ax.$$

$$321) \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx.$$

$$322) \int \frac{\cos ax}{x} \, dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots *).$$

$$323) \int \frac{\cos ax}{x^2} \, dx = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax \, dx}{x} \quad (\text{см. № 283}).$$

$$324) \int \frac{\cos ax}{x^n} \, dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax \, dx}{x^{n-1}} \quad (n \neq 1) \quad (\text{см. № 285}).$$

$$325) \int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \operatorname{tg} ax).$$

$$326) \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$$

$$327) \int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\sin ax}{2a \cos^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$328) \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 1).$$

$$329) \int \frac{x dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(ax)^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61(ax)^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385(ax)^{10}}{10 \cdot 8!} + \dots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots \right)^*.$$

$$330) \int \frac{x dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax.$$

$$331) \int \frac{x dx}{\cos^n ax} = \frac{x \sin ax}{(n-1)a \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n > 2).$$

$$332) \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$333) \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$

$$334) \int \frac{x dx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}.$$

$$335) \int \frac{x dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}.$$

$$336) \int \frac{\cos ax dx}{1 + \cos ax} = x - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$337) \int \frac{\cos ax dx}{1 - \cos ax} = -x - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$

$$338) \int \frac{dx}{\cos ax(1 + \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$$

$$339) \int \frac{dx}{\cos ax(1 - \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$$

$$340) \int \frac{dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}.$$

$$341) \int \frac{dx}{(1 - \cos ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}.$$

$$342) \int \frac{\cos ax dx}{(1 + \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3 \frac{ax}{2}.$$

$$343) \int \frac{\cos ax dx}{(1 - \cos ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} - \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3 \frac{ax}{2}.$$

$$344) \int \frac{dx}{1 + \cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \arcsin \left(\frac{1 - 3 \cos^2 ax}{1 + \cos^2 ax} \right).$$

$$345) \int \frac{dx}{1 - \cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$$

$$346) \int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$

($|a| \neq |b|$; при $|a| = |b|$ см. № 314).

$$347) \int \frac{dx}{b+c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-c) \operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (\text{для } b^2 > c^2),$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{(c-b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \sqrt{c^2-b^2}}{(c-b) \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \sqrt{c^2-b^2}} \quad (\text{для } b^2 < c^2).$$

$$348) \int \frac{\cos ax \, dx}{b+c \cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b+c \cos ax} \quad (\text{см. № 347}).$$

$$349) \int \frac{dx}{\cos ax(b+c \cos ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b+c \cos ax}$$

(см. № 347).

$$350) \int \frac{dx}{(b+c \cos ax)^2} = \frac{c \sin ax}{a(c^2-b^2)(b+c \cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2} \int \frac{dx}{b+c \cos ax}$$

(см. № 347).

$$351) \int \frac{\cos ax \, dx}{(b+c \cos ax)^2} = \frac{b \sin ax}{a(b^2-c^2)(b+c \cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2} \int \frac{dx}{b+c \cos ax}$$

(см. № 347).

$$352) \int \frac{dx}{b^2+c^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}} \quad (b > 0).$$

$$353) \int \frac{dx}{b^2-c^2 \cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}} \quad (b^2 > c^2, b > 0),$$

$$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} ax - \sqrt{c^2-b^2}}{b \operatorname{tg} ax + \sqrt{c^2-b^2}} \quad (c^2 > b^2, b > 0).$$

Интегралы, содержащие синус и косинус

$$354) \int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax.$$

$$355) \int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$$

$$356) \int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$$

$$357) \int \sin ax \cos^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$$

$$358) \int \sin^n ax \cos^m ax \, dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax \, dx$$

(понижение степени n ; m и $n > 0$),

$$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx$$

(понижение степени m ; m и $n > 0$).

$$359) \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax.$$

$$360) \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{\sin ax} \right].$$

$$361) \int \frac{dx}{\sin ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax} \right).$$

$$362) \int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} ax - \frac{1}{2 \sin^2 ax} \right).$$

$$363) \int \frac{dx}{\sin ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left(\ln \operatorname{tg} ax + \frac{1}{2 \cos^2 ax} \right).$$

$$364) \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2ax.$$

$$365) \int \frac{dx}{\sin^2 ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left[\frac{\sin ax}{2 \cos^2 ax} - \frac{1}{\sin ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \right].$$

$$366) \int \frac{dx}{\sin^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\cos ax} - \frac{\cos ax}{2 \sin^2 ax} + \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right).$$

$$367) \int \frac{dx}{\sin ax \cos^n ax} =$$

$$= \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin ax \cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1) \quad (\text{см. №№ 361 и 363}).$$

$$368) \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos ax} \quad (n \neq 1) \quad (\text{см. №№ 360 и 362}).$$

$$369) \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$

(понижение степени n ; $m > 0, n > 1$),

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$

(понижение степени m ; $n > 0, m > 1$).

$$370) \int \frac{\sin ax dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a \cos ax} = \frac{1}{a} \sec ax.$$

$$371) \int \frac{\sin ax dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{2a \cos^2 ax} + C = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + C_1.$$

$$372) \int \frac{\sin ax dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1) \cos^{n-1} ax}.$$

$$373) \int \frac{\sin^2 ax dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a} \sin ax + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$$

$$374) \int \frac{\sin^2 ax dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a} \left[\frac{\sin ax}{2 \cos^2 ax} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) \right].$$

$$375) \int \frac{\sin^2 ax dx}{\cos^n ax} = \frac{\sin ax}{a(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1)$$

см. №№ 325, 326, 328).

$$376) \int \frac{\sin^3 ax dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a} \left(\frac{\sin^2 ax}{2} + \ln \cos ax \right).$$

$$377) \int \frac{\sin^3 ax dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax} \right).$$

$$378) \int \frac{\sin^3 ax dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3) \cos^{n-3} ax} \right] \quad (n \neq 1, n \neq 3).$$

$$379) \int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1).$$

$$380) \int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx =$$

$$= \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx \quad (m \neq 1),$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax}{a(n-m) \cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m} \int \frac{\sin^{n-2} ax dx}{\cos^m ax} \quad (m \neq n),$$

$$= \frac{\sin^{n-1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\sin^{n-2} ax dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1).$$