

Системы дифференциальных уравнений.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Основные понятия и определения.

Нормальные системы

Определение 1. Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), i = \overline{1, n}$$

где y_i , – неизвестные функции от независимой переменной x , подлежащие определению; f_i , – известные функции от x , заданные и **непрерывные** в некоторой области. **Число n называется порядком системы**

Например. $n=2$, система второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Непрерывность функции

Определение непрерывности по Коши

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая отображает множество действительных чисел \mathbb{R} на другое подмножество B действительных чисел. Говорят, что функция $f(x)$ является непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число σ , такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношению: $|x - a| < \sigma$,

выполняется неравенство: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Определение непрерывности в терминах приращений аргумента и функции

Определение непрерывности можно также сформулировать, используя приращения аргумента и функции. Функция является непрерывной в точке $x = a$, если справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

где $\Delta x = x - a$

Определитель (детерминант матрицы)

Определитель (детерминант) матрицы - это многочлен от элементов исходной матрицы.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot M_j^k$$

где M_j^k - дополнительный минор к элементу a_{kj}

Детерминант матрицы 2x2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Детерминант матрицы 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть у нас есть матрица
A и вектор X

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Если мы можем представить матрицу A в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ненулевой вектор X называется собственным вектором оператора A, если оператор A переводит X в коллинеарный ему вектор, то есть $AX = \lambda X$. Число λ называется собственным значением или собственным числом оператора A, соответствующим собственному вектору X.

Свойства собственных чисел и собственных векторов.

1. Любая линейная комбинация собственных векторов X_1, X_2, \dots, X_m оператора A , отвечающих одному и тому же собственному числу λ , является собственным вектором с тем же собственным числом.
2. Собственные векторы X_1, X_2, \dots, X_m оператора A с попарно различными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ линейно независимы.
3. Если собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$, то собственному числу λ соответствует не более m линейно независимых собственных векторов.

Итак, если имеется n линейно независимых собственных X_1, X_2, \dots, X_n векторов, соответствующих различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то они линейно независимы, следовательно, их можно принять за базис пространства.

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX - \lambda X = 0 \Rightarrow X(A - \lambda E)$$

где E – единичная матрица

Решение системы уравнений методом Эйлера.

Пусть у нас есть система уравнений,
где $y=y(x)$, $z=z(x)$:

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - константы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases}$$

Согласно методу Эйлера, решение
системы ищется в виде:
Где λ – собственное значение

$$y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$$

частные



решения

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 e^{\lambda x} = a_{11} \alpha_1 e^{\lambda x} + a_{12} \alpha_2 e^{\lambda x} \\ \lambda \alpha_2 e^{\lambda x} = a_{21} \alpha_1 e^{\lambda x} + a_{22} \alpha_2 e^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 = 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Так как $a_{11}, a_{12}, \dots, \lambda$ некоторые постоянные числа,
подлежащие определению, среди которых хотя бы
одно отлично от нуля, то определитель системы
должен быть равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

Уравнение называется
характеристическим уравнением, а его
корни – характеристическими числами
системы.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Каждому из корней характеристического
уравнения соответствует хотя бы одно
частное решение указанного вида.

$$y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$$

1. Оба корня характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
вещественны и различны:

Подставим оба корня в уравнения:

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$(a_{11} - \lambda_1)\alpha_1^1 + a_{12}\alpha_2^1 = 0. \Rightarrow y_1(x) = \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x}, z_1(x) = \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x}$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_2)\alpha_2 = 0 \Rightarrow y_2(x) = \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}, z_2(x) = \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

**Итоговое решение будет
суммой частных решений**

$$y(x) = c_1 \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}$$

$$z(x) = c_1 \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

2. Если $\lambda_1 = a + ib$ - корень характеристического уравнения, то $\lambda_2 = a - ib$

Первое решение системы

$$y_1(x) = \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} = \alpha_1^1 e^{(a+ib)x} = \alpha_1^1 e^{ax} \cdot e^{ibx} = \alpha_1^1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \tilde{y}_1(x) + i \cdot \tilde{y}_2(x)$$



$$z_1(x) = \alpha_2^1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \tilde{z}_1(x) + i \cdot \tilde{z}_2(x)$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим два вещественных линейно независимых частных решения системы, соответствующих корню $a+ib$

Решения, соответствующие корню $a-ib$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a+ib$.

Итоговое решение системы будет:

$$y(x) = c_1 \cdot \tilde{y}_1(x) + c_2 \cdot \tilde{y}_2(x)$$

$$z(x) = c_1 \cdot \tilde{z}_1(x) + c_2 \cdot \tilde{z}_2(x)$$

Решение системы уравнений методом Эйлера.

3. Кратные корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

В случае кратного корня характеристического уравнения общее решение системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$y(x) = e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x), z(x) = e^{\lambda x} (a_1 + a_2 x)$$

c_1, c_2, a_1, a_2 - постоянные числа, причем a_1 и a_2 должны быть выражены через c_1 и c_2 (или наоборот).

Пример $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$ Ищем решение в виде $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$

Характеристическое уравнение будет: $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$y(x) = e^{2x} (c_1 + c_2 x), z(x) = e^{2x} (a_1 + a_2 x) \Rightarrow c_1 + c_2 x + c_2 = -(a_1 + a_2 x)$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x} (c_1 + c_2 x)$$

$$z(x) = -e^{2x} ((c_1 + c_2) + c_2 x),$$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

Системы дифференциальных уравнений можно решать не только методом исключения, неизвестных в котором система сводится к уравнению более высокого порядка, но и подбирая такие комбинации уравнений, которые легко могут быть проинтегрированы.

Если удастся найти n независимых первых интегралов, то они определяют решение системы.

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$$

$$k = 1 \dots m$$

Решение системы состоит в следующем: с помощью арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) из уравнений системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. достаточно просто решаемые уравнения вида:

$$F\left(u, t, \frac{du}{dt}\right) = 0 \quad \text{где } u \text{ функция зависящая от } x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

Для нахождения первых интегралов иногда удобно записать исходную систему в т.н. *симметричной форме*:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)} = dt$$

Интегрирование уравнений в такой форме достаточно просто

Пример

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot dx = dt \\ x \cdot dy = -dt \end{cases}$$

Сложим два уравнения и получим: $\Rightarrow y \cdot dx + x \cdot dy = 0$

Решение системы уравнений методом интегрируемых комбинаций.

$$\Rightarrow y \cdot dx + x \cdot dy = 0 \Rightarrow d(x \cdot y)$$


$$d(x \cdot y) = 0 \Rightarrow x \cdot y = c_1 \quad \text{- Первый интеграл}$$

Получим уравнения $y=y(t)$ и $x=x(t)$. Для этого подставим выражение $y = c_1 / x$

в исходное уравнение и получим: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} = \frac{x}{C_1}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{C_1} \Rightarrow \ln|x| = \frac{t}{C_1} + \ln(C_2) = \ln(C_2 \exp^{\frac{t}{C_1}})$$

откуда следует $x = C_2 \exp^{\frac{t}{C_1}}$ По аналогии $y = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \exp^{\frac{-t}{C_1}}$

Итоговый ответ: $x = C_2 \exp^{\frac{t}{C_1}} \quad y = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \exp^{\frac{-t}{C_1}}$

THANK YOU!



Главная

О нас

События

Публикации

Исследования

Материалы

Ссылки

Контакты

ENGLISH



Новости



Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИНИС в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИНИС провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радаев).

[Подробнее...](#)

ЛИНИС – участник Балтийского партнерства по новым медиа



Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИНИС).

[Подробнее...](#)

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция