INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Исследование устойчивости в экономических моделях.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Упрощенная модель национальной экономики.

W – национальный доход (общий), **S** – потребление, **E** – государственные расходы.

Пусть скорость изменения национального дохода описывается следующим уравнением.

$$W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S, \alpha, \beta > 0$$

Скорость изменение потребления, **D** – разность между доходом и потреблением и гос. расходами: **D=W-S-E.** Пусть **E=const**

$$S' = \gamma \cdot D, \gamma > 0$$

Таким образом поведение национальной экономики описывается системой уравнений:

$$W' = \alpha \cdot W - \beta \cdot S$$

$$S' = \gamma \cdot (\mathrm{W} - \mathrm{S} - \mathrm{E}_0)$$

Точка равновесия находится из условий равенства нулю производных.

$$\alpha \cdot W - \beta \cdot S = 0$$

$$\gamma \cdot (\mathrm{W} - \mathrm{S} - \mathrm{E}_0) = 0$$

$$W^* = \frac{\beta \cdot E_0}{\beta - \alpha}, S^* = \frac{\alpha \cdot E_0}{\beta - \alpha}$$

$$\beta - \alpha > 0$$

Упрощенная модель национальной экономики.

Для упрощения исследования можно сделать замену координат, что эквивалентно переводу точки равновесия в центр системы координат.

$$x = W - \frac{\beta \cdot E_0}{\beta - \alpha},$$

$$y = S - \frac{\alpha \cdot E_0}{\beta - \alpha}$$

Тогда наша система
Будет следующей:

$$x' = \alpha \cdot x - \beta \cdot y,$$

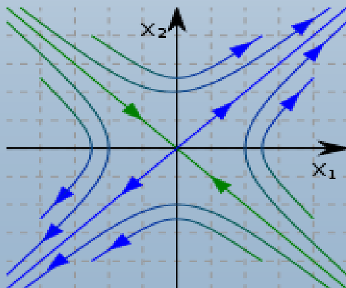
$$y' = \gamma \cdot (x - y)$$

Соответственно
матрица будет следующей:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{gathered} \det(A) = \gamma \cdot (\beta - \alpha) \\ \mathrm{Tr}(A) = \alpha - \gamma \end{gathered}$$

Устойчивость национальной экономики можно определить решая характеристическое уравнение и определяя корни λ. Для устойчивого развития нужно что бы:

$$(Tr(A))^2 > 4 \cdot \det(A) \qquad (\alpha - \gamma)^2 > 4 \cdot \gamma \cdot (\beta - \alpha)$$



Модель инфляции (общие определения)

Инфляция это долговременный процесс снижения покупательной способности денег. Необходимым условием развития инфляции является увеличение массы денег или увеличения скорости их обращения по сравнению с ростом реального национального дохода.

Инфляция - это повышение общего уровня цен вследствие долговременного превышения совокупного спроса над совокупным предложением, сопровождающееся обесценением денежной единицы.

Инфляция не означает, что все цены в экономике стремятся к повышению. Цены могут колебаться одновременно с разной скоростью и разнонаправленно на межотраслевом и внутриотраслевом уровне.

Модель инфляции (общие определения)

Инфляция, является постоянным спутником хозяйственной жизни после отказа от системы золотого стандарта в промышленно развитых и развивающихся странах. Длительное пребывание в условиях инфляции вызвало приспособление к ней экономических субъектов при помощи механизма инфляционных ожиданий. **Инфляционные ожидания** (π) - это оценка субъектами рынка изменения темпов инфляции в будущем периоде. Можно сказать, что инфляционные ожидания управляют ценами. Экономические агенты закладывают инфляционные ожидания в будущие номинальные цены на всех стадиях производства и реализации товаров и услуг, чтобы застраховать свою выручку от обесценения.

Модель инфляции (общие определения)

Уравнение количественной теории денег: ***M V =P Y,*** где

Y - реальный выпуск,

V - скорость обращения денег,

M – денежная масса,

P – цена (уровень фактических цен)

Если реальный выпуск **Y** и скорость обращения денег **V** не изменяются во времени то скорость изменения цены совпадает со скоростью изменения денежной массы.

$$\frac{P'}{P} = \frac{M'}{M} \qquad \sigma = \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} \qquad \frac{P'}{P}$$

- Темп инфляция

Однако предположение о том, что скорость обращения денег *V постоянна, оправдано* не всегда. Можно считать, что скорость обращения денег является возрастающей функцией от уровня инфляции, точнее, от ожидаемой инфляции.

Модель инфляции (МОДЕЛЬ КЕЙГАНА)

Суть модели Кейгана заключается в следующих двух утверждениях.

1. Реальные денежные запасы изменяются следующим образом (функция спроса денег):

$$m = \frac{M}{P} = e^{-a\pi} \Rightarrow \ln(M) - \ln(P) = -\mathrm{a}\,\pi$$

m - реальные денежные запасы, π - ожидаемый темп инфляции,
a> 0 – эластичность денежного спроса, b – параметр адаптации.

2. Вторым компонентом модели Кейгана является гипотеза в соответствии с которой темп инфляции изменяется следующим образом:

$$\frac{d\pi}{dt} = b\left(\frac{P'}{P} - \pi\right)$$

Сделаем переобозначение: $\mathrm{m} = \ln(M);\ \mathrm{p} = \ln(P)$

В итоге получим следующий набор уравнений:

$$\mathrm{m} - p = -a\pi$$

$$\pi' = \beta(\mathrm{p}' - \pi)$$

Модель инфляции (МОДЕЛЬ КЕЙГАНА)

Если денежная масса не растет, то есть m=const, тогда p можно исключить за счет дифференцирования первого равнения по времени.

$$p' = -a\pi$$

В итоге получим уравнение: $\pi' = \gamma(\mathrm{p}' - \pi)$ где $\gamma = \dfrac{b}{ab-1}$

Итоговое решение будет: $\pi = \pi_0 e^{\gamma t}$

1. **Если ab<0** тогда решение будет следующее: $\pi(t) \to 0$ при $t \to \infty$
Следовательно инфляционные ожидания снижаются.

2. **Если ab>0** то у нас получается расходящиеся решение.
$\pi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

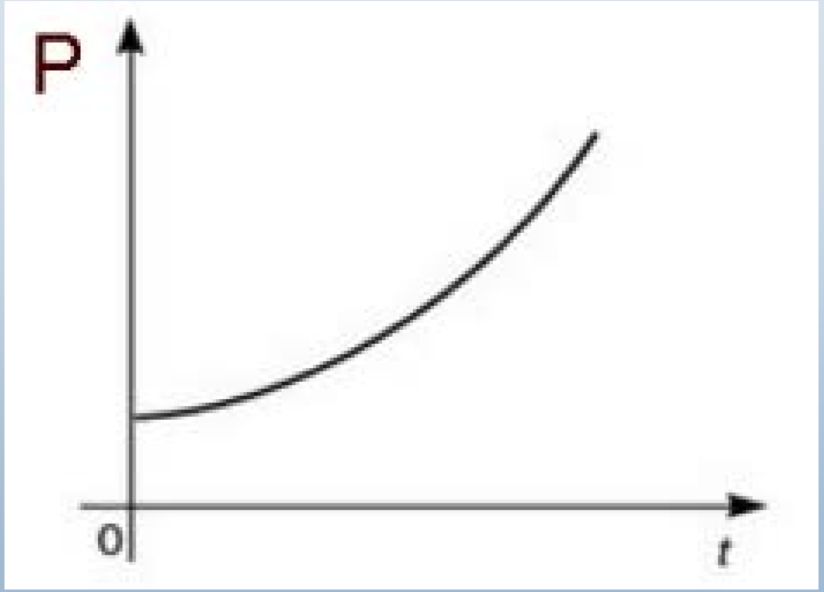
Динамика роста цен при постоянном темпе инфляции

Темп инфляции постоянный и равен **r**.

Скорость изменения цен при условии постоянного темпа инфляции описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P(\mathrm{t})$$

$$\frac{dP}{P} = dt \Rightarrow P(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_0\, e^{rt}$$



Модель взаимодействия двух популяций

Рассмотрим замкнутую систему, в которую входят два вида. Предположим, что взаимодействие межу ними происходит следующим образом:

1. Представители одного вида являются хищниками, а другие жертвами.
2. Представители двух видов взаимодействуют между собой. Взаимодействие описывается функциями R_1 и R_2

Динамика популяций описывается двум дифференциальными ур-ми.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = R_1 \cdot N_1(\mathrm{t}) \\ \frac{dN_2}{dt} = R_2 \cdot N_2(\mathrm{t}) \end{cases}$$

Функция взаимодействия в общем виде:

$$R_i = a_i + b_i N_i + c_i N_j, i, j = 1, 2$$

Модель взаимодействия двух популяций (Модель Вольтера - Лотки).

Модель Вольтера – Лотки выглядит следующим образом.

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\mathrm{a} - \mathrm{b}\cdot N_2)\cdot N_1(\mathrm{t}) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = (-\mathrm{c} + \mathrm{d}\cdot N_1)\cdot N_2(\mathrm{t}) \end{cases}$$

где a, b, c, d>0

a – скорость размножения

b – скорость гибели от встречи с хищником.

c – скорость гибели хищника.

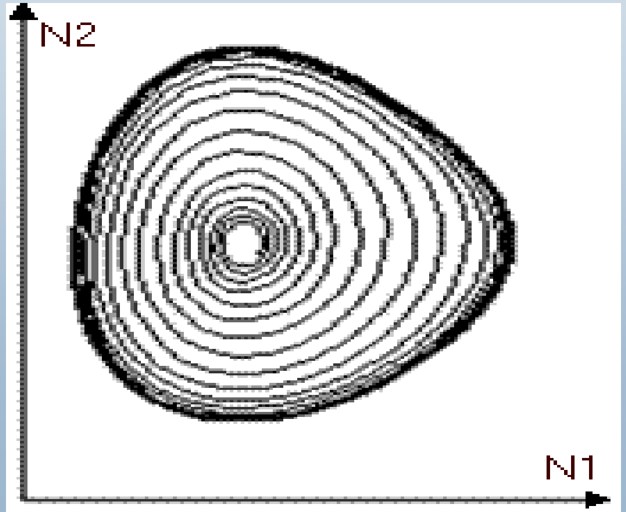
b – скорость размножения хищников.

Для стационарной позиции изменение популяции равно нулю.

Найдем положения равновесия Автономной системы. Система имеет две точки равновесия.

$$(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) = (0, 0)$$

$$(N_1, N_2) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{d}\right)$$



Модель взаимодействия двух популяций (Модель Вольтера - Лотки).

К сожалению, решить эту систему уравнений аналитически, т.е. выразить $x_1(t)$ и $x_2(t)$ через известные элементарные функции, невозможно. Однако можно реализовать расчет на компьютере.

$$\frac{dN_2}{dt} = p_2 N_1 N_2 - d_2 N_2 \qquad \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - p_1 N_1 N_2$$

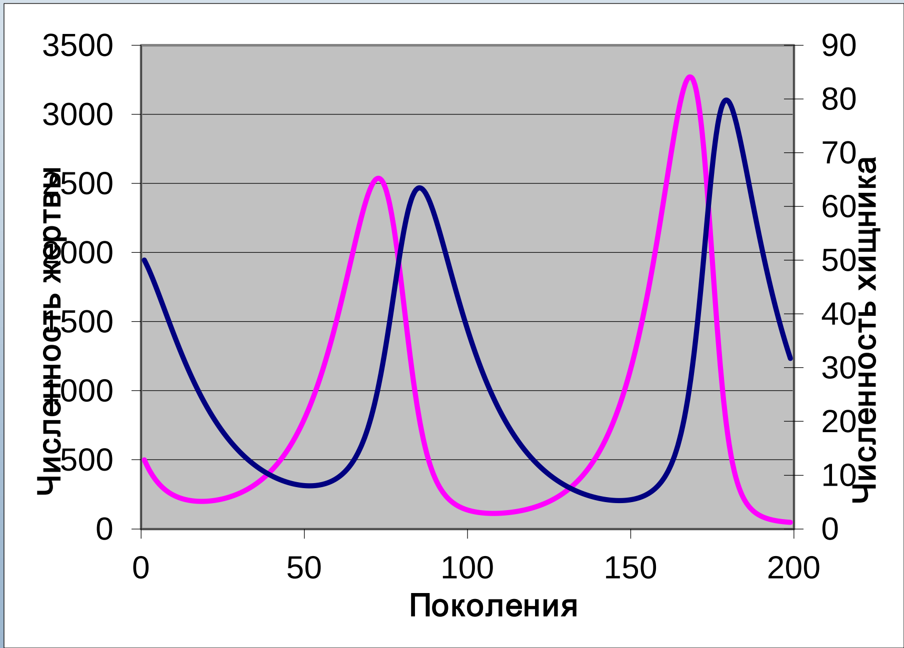
r_1 - рождаемость жертвы

p_1 - коэффициент хищничества для жертвы

d_2 - смертность хищника

p_2 - коэффициент хищничества

r1	p1	d2	p2
0,1	0.004	0,06	0.0007



Модель организации рекламной компании.

Представим, что некоторая компания разработала новый продукт или сервис. Маркетинговая стратегия компании предполагает агрессивное рекламирование.

1. Величина $q(t)$ представляет собой ***рекламную активность***, которая описывается темпом расхода рекламного бюджета, например, суммой в рублях (или в любой другой валюте), которую компания тратит на рекламу за неделю;
2. Величина $A(t)$ описывает ***осведомленность целевой группы*** потенциальных покупателей нового товара или услуги.

Моделью Нерлова-Эрроу.

Данная модель связывает между собой две введенные переменные: рекламную активность **q(t)** и осведомленность потребителей **A(t)** и описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dA}{dt} = bq(\mathrm{t}) - \mathrm{k} \cdot \mathrm{A}$$

Модель организации рекламной компании.

$$\frac{dA}{dt} = bq(\mathrm{t}) - \mathrm{k} \cdot \mathrm{A}$$

где *b* − некоторая постоянная, описывающая эффективность рекламы, *k* − константа, соответствующая скорости "забывания".

Первое слагаемое ***bq*(*t*)** обеспечивает линейный **рост осведомленности потребителей** в результате воздействия рекламы. Второй член ***−kA*** описывает противоположный процесс − **забывание о рекламируемом продукте**.

Решение: Интегрирующий множитель представляет собой экспоненциальную функцию:

$$u(\mathrm{t}) = e^{\int kdt} = e^{kt}$$

Общее решение данного дифференциального уравнения выражается формулой:

$$A(\mathrm{t}) = \frac{\int q(\mathrm{t}) \cdot e^{kt} dt + C}{e^{kt}}$$

Модель организации рекламной компании.

Пример. Рекламный бюджет составляет $12,000.
Коэффициенты k и b равны: $k = 1/4$, $b = 25$.

Время t измеряется в месяцах. По условию задачи, расходы на рекламу постоянны в течение всего года.
Определить функцию осведомленности целевой группы при заданных условиях.

Модель организации рекламной компании.

Пример. Рекламный бюджет составляет $12,000.
Коэффициенты *k* и *b* равны: $k = 1/4$, $b = 25$.

Время *t* измеряется в месяцах. По условию задачи, расходы на рекламу постоянны в течение всего года.
Определить функцию осведомленности целевой группы при заданных условиях.

Решение. q_0=12000/12=1000$

Дифференциальное уравнение будет следующим: $$\frac{dA}{dt}+\frac{A}{4}=25000$$

Интегрирующий множитель: $$u(\mathrm{t})=e^{\int \frac{1}{4}dt}=e^{\frac{t}{4}}$$

Общее решение уравнения: $$A(\mathrm{t})=100000+C_0 e^{\frac{-t}{4}}$$

Константу C определим из начального условия A(t = 0) = 0. $$A(\mathrm{t})=100000(1-e^{\frac{-t}{4}})$$

Модель организации рекламной компании.

Пример. Используя условия предыдущей задачи 1, выяснить как изменится число потенциальных покупателей к концу года, если весь рекламный бюджет израсходовать равномерно в течение первых 6 месяцев?

Модель организации рекламной компании.

Пример. Используя условия предыдущей задачи 1, выяснить как изменится число потенциальных покупателей к концу года, если весь рекламный бюджет израсходовать равномерно в течение первых 6 месяцев?

Решение. Решение разбивается на два этапа. **На первом этапе**. К концу 6-го месяца величина *A* легко вычисляется по формуле:

$$A(\mathrm{t}) = bq_0(1 - e^{\frac{-t}{4}})$$

Коэффициенты будут иметь следующие значения: k = 1/4, b = 25, q0 = 2000.

$$A(\mathrm{t}) = 200000(1 - e^{\frac{-t}{4}})$$

В момент t = 6 количество покупателей, ознакомленных с продуктом, составляет:

$$A(\mathrm{t}) = 155374$$

INTERNET STUDIES LAB LINIS

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Модель организации рекламной компании.

На втором этапе. с 7-го по 12-й месяц включительно − реклама полностью отсутствует. В результате уровень осведомленности $A(t)$ будет уменьшаться в соответствии с уравнением:

$$\frac{dA}{dt} + kA = 0$$

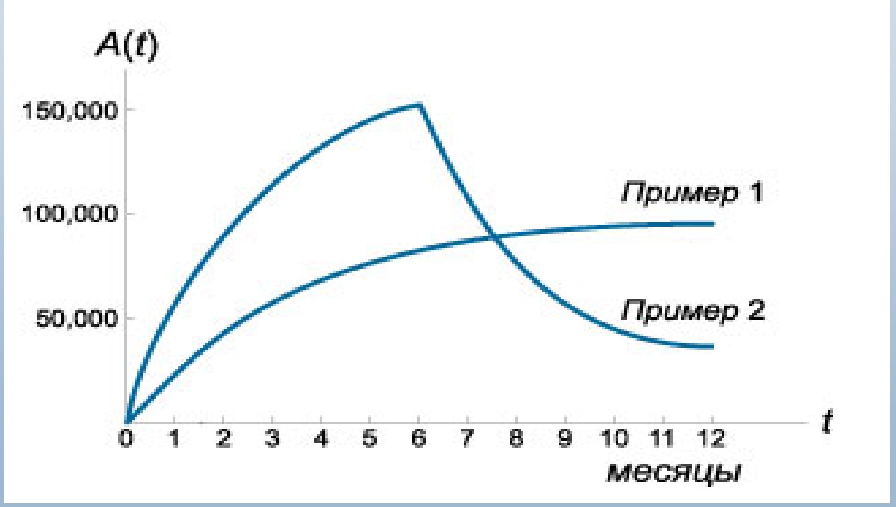
Решение однородного уравнения будет: $A(\mathrm{t}) = ce^{-k(\mathrm{t}-6)}$

Константа C находится из начального условия для второго этапа.

$$A(\mathrm{t}=6) = ce^{0} = 155374$$

Закон изменения A(t) во втором полугодии имеет вид:

$$A(\mathrm{t}) = 155374e^{-\frac{t-6}{4}}$$



Трехступенчатая система управления.

Производство продукта **x** управляется руководителем **y**. В свою очередь руководитель **y** управляется генеральным директором **z**. Генеральный директор осуществляет обратную связь, то есть пытается либо увеличить производство продукта x либо уменьшить.

Вся система описывается набором уравнений:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -k(\mathrm{x} - \mathrm{X}) \end{cases}$$

Решение данной системы:

1. **Решаем однородное уравнение при помощи характеристического уравнения.**
2. **Находим собственные числа и собственные вектора.**
3. **Находим общее решение.**

Однородная система выглядит следующим образом;

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -k & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^3 + k = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{k^{1/3}}{2} \qquad \lambda_{2,3} = \frac{k^{1/3}}{2} \pm i\sqrt{3}$$

Трехступенчатая система управления.

Найдем собственный вектор для первого собственного числа: $\lambda_1 = \dfrac{k^{1/3}}{2}$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (\mathrm{a}_{11} - \lambda_1)\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{21} + a_{13}\gamma_{31} = 0 \\ \mathrm{a}_{11}\,\gamma_{11} + (a_{12} - \lambda_1)\gamma_{21} + a_{13}\gamma_{31} = 0 \\ \mathrm{a}_{11}\,\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{21} + (a_{13} - \lambda_1)\gamma_{31} = 0 \end{cases}$$

В данном случае (с учетом нашей матрицы) получим:

$$\begin{cases} k^{1/3}\gamma_{11} + \gamma_{21} = 0 \\ k^{1/3}\gamma_{21} + \gamma_{31} = 0 \\ -k\gamma_{11} + k^{1/3}\gamma_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_{11} = \gamma_{31}k^{-2/3}, \gamma = -\gamma_{31}k^{-1/3}$$

$\gamma_{31} =$ Любое число

Трехступенчатая система управления.

Пусть $\gamma_{31} = 1$ тогда $\lambda_1 = -\lambda^{1/3}$

$$\begin{pmatrix} k^{-2/3} \\ -k^{1/3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Частное решение

$$\begin{pmatrix} x_1 = k^{-2/3} \cdot e^{-t \cdot k^{1/3}} \\ y_1 = k^{-1/3} \cdot e^{-t \cdot k^{1/3}} \\ z_1 = e^{-t \cdot k^{1/3}} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим второе собственное число: $\lambda_2 = \dfrac{k^{1/3}}{2} + i\sqrt{3}$

Уравнения для определения собственного вектора:

$$\begin{cases} -\dfrac{k^{1/3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\gamma_{12} + \gamma_{22} = 0 \\ -\dfrac{k^{1/3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\gamma_{22} + \gamma_{32} = 0 \\ -k\gamma_{12} - \dfrac{k^{1/3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\gamma_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{12} = \dfrac{1}{2} k^{-2/3} \cdot (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \\ \gamma_{22} = -\dfrac{1}{2} k^{-1/3} \cdot (1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \\ \gamma_{32} = -1 \end{pmatrix}$$

Трехступенчатая система управления.

Таким образом комплексным собственным значениям соответствуют следующие решения:

$$\lambda_{2,3} = \frac{k^{1/3}}{2} \pm i\sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2,3} = \dfrac{k^{-2/3}}{2} \cdot (1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \cdot e^{\frac{tk^{1/3}}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})} \\ y_{2,3} = -\dfrac{k^{-1/3}}{2} \cdot (1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \cdot e^{-\frac{tk^{1/3}}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})} \\ z_{2,3} = -e^{\frac{tk^{1/3}}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})} \end{pmatrix}$$

Устойчивость системы определяется знаком коэффициента k, так как k>0 значит трехступенчатая система неустойчива. Происходи катастрофическое нарастание колебаний.

Задача про три завода.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.035x + 0.007y + 0.008z \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.02x - 0.017y + 0.01z \\ \dfrac{dz}{dt} = 0.015x + 0.01y - 0.018z \\ x + y + z = 100000 \end{cases}$$

Решение данной системы:

1. **Решаем однородное уравнение при помощи характеристического уравнения.**
2. **Находим собственные числа и собственные вектора.**
3. **Находим общее решение.**

$$A = \begin{pmatrix} -0.035 & 0.007 & 0.008 \\ 0.02 & -0.017 & 0.01 \\ 0.015 & 0.01 & -0.018 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -0.035-\lambda & 0.007 & 0.008 \\ 0.02 & -0.017-\lambda & 0.01 \\ 0.015 & 0.01 & -0.018-\lambda \end{pmatrix}$$

Задача про три завода.

Собственные числа будут: $\lambda_1 = -0,0423; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -0.0276$

Собственные вектора:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -0.8043 \\ 0.5240 \\ 0.2803 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -0.2886 \\ -0.7145 \\ -0.6374 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -0.475 \\ -0.7296 \\ -0.6374 \end{pmatrix}$$

Общее решение будет:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -0.8043 \\ 0.5240 \\ 0.2803 \end{pmatrix} \cdot e^{-0.0423t} + c_2 \begin{pmatrix} -0.2886 \\ -0.7145 \\ -0.6374 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -0.475 \\ -0.7296 \\ -0.6374 \end{pmatrix} \cdot e^{-0.0276t}$$

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!