INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Метод вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + ...a_0 \cdot y^0 = f(\mathrm{x})$$

Предположим, что у нас есть фундаментальный набор решений y_1, y_2,y_3, ..y_n для однородного уравнения.

$$y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + ...a_0 \cdot y^0 = 0$$

Фундаментальной системой решений однородного линейного дифференциального уравнения называется упорядоченный набор из *n* линейно независимых решений уравнения.

Тогда решение неоднородного уравнения можно искать в следующем виде:

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1(\mathrm{x}) \cdot y_1(\mathrm{x}) + ...\mathrm{C}_n \cdot y_n(\mathrm{x})$$

где C_1, C_2,C_3, ..C_n неизвестные n раз дифференцируемые функции на промежутке [a, b]. Эти функции называют *варьируемые постоянные* общего решения однородного уравнения

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

Метод вариации произвольных постоянных.

Неизвестные функции C_1, C_2,C_3, ..C_n можно найти из следующего набора уравнений. Подставим решение с неизвестными функциями C_i(x) в исходное уравнение. Сгруппируем все члены с одинаковым порядком производной вместе. В итоге получим следующий набор уравнений.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+.......C'_n(x)\cdot y_n(x)=0 \\ C'_1(x)\cdot y'_1(x)+.......C'_n(x)\cdot y'_n(x)=0 \\ C'_1(x)\cdot y''_1(x)+.......C'_n(x)\cdot y''_n(x)=0 \\ .... \\ C'_1(x)\cdot y^{n-1}{}_1(x)+.......C'_n(x)\cdot y^{n-1}{}_n(x)= f(x) \end{cases}$$

Такой метод отыскания частного решения неоднородного уравнения называется *методом* ***вариации произвольных постоянных***

Метод вариации произвольных постоянных.

Пример: $y' + 2 \cdot x \cdot y = x \cdot e^{-x^2}$

На первом этапе будем решать однородной уравнение: $y' + 2 \cdot x \cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot x \cdot y \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx \Rightarrow \quad \ln(\mathrm{y}) = -2\,\mathrm{x}^2 + c$$

Соответственно решение однородного уравнения будет следующим: $y = e^{-x^2 + c}$

Тогда решение не однородного уравнения можно записать таким образом: $y = u(\mathrm{x}) \cdot e^{-x^2}$

Подставим последнее решение в исходное нелинейное уравнение

Метод вариации произвольных постоянных.

По правилу дифференцирования:

$$y' = (\mathrm{u}\mathrm{e}^{-x^2})' = (\mathrm{u})' \cdot e^{-x^2} + u \cdot (\mathrm{e}^{-x^2})' = u' \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2}$$

В итоге получим следующее выражение:

$$u' \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2} + 2 \cdot x \cdot u \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u' \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

Итоговое решение будет следующим:

$$u = {x^2}/{2} + C \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2 \cdot e^{-x^2}}{2}$$

Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Система уравнений вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j + f_i(\mathrm{t})$$

называется ***неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами***. Будем считать, f(t) являются непрерывными функциями на [a, b].

Система дифференциальных уравнений называется однородной системой:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j$$

Введем набор векторов $x = x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}), \ldots.. x_m(\mathrm{t})$ $f = f_1(\mathrm{t}), \mathrm{f}_2(\mathrm{t}), \ldots.. \mathrm{f}_m(\mathrm{t})$

Система дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + f$$

Решение неоднородной системы уравн. сводится в начале к решению однородной системы, потом на основе однородного решения ищется решение не однородной системы.

Решение системы однородных уравнений.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \,, \end{cases}$$

Решение однородного уравнения можно искать в следующем виде:

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t},\ x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = \alpha_n e^{\lambda t}$$

Для того что бы получить набор уравнений для коэффициентов α и λ Нужно все решения подставить в исходный набор дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Решение системы однородных уравнений.

Так как наши решения выглядят таким образом:

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= \alpha_1^{(i)} e^{\lambda_i t}, \\ x_2^{(i)} &= \alpha_2^{(i)} e^{\lambda_i t}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(i)} &= \alpha_n^{(i)} e^{\lambda_i t} \end{aligned}$$

и

$$\lambda \boldsymbol{\alpha} e^{\lambda t} = A \boldsymbol{\alpha} e^{\lambda t}$$

то в итоге нам нужно решать уравнение,

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{\alpha} = 0$$

то есть, для каждого λ мы находим собственные вектора α и таким образом находим итоговый набор решений.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Решение системы однородных уравнений.

Для данного характеристического уравнения получим следующие решения:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4,$ Теперь для найденных собственных чисел нужно найти

собственные вектора. Для этой цели нужно решить уравнение $(A - \lambda E)\boldsymbol{\alpha} = 0$

Матрица А: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Для λ=1 $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Нахождение собственного вектора: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = 0$

Таким образом для λ=1 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Итоговое решение будет следующим:

$$x_1(t) = -2C_1e^t + C_2e^{4t},$$
$$x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

Таким образом для λ=4 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Решение системы неоднородных уравнений.

Решение неоднородного уравнения : $$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + f$$

Можно искать в следующем виде: $$x(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x(\mathrm{t})_j$$

$x_1(\mathrm{t}),..x_m(\mathrm{t})$ является фундаментальной системой решений, и эти решения получены из решения однородной системы уравнений

Подставим фундаментальное решение в исходное уравнение, предполагая при этом, что функции C_i являются неизвестными, но непрерывными.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x(\mathrm{t})_j + f_i(\mathrm{t})$$

Получим матричное равенство.

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i \cdot x(\mathrm{t})_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x'(\mathrm{t})_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot Ax(\mathrm{t})_i + f(\mathrm{t})$$

Решение системы неоднородных уравнений.

Так как $x(\mathrm{t})_i = Ax_i$ то последнее равнение можно записать в следующем виде.

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i \cdot x(\mathrm{t})_i = f(\mathrm{t})$$

Пример: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$ Эта система в матричной форме будет следующей:

$$X(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} x(\mathrm{t}) \\ y(\mathrm{t}) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{f}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} o \\ \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow X'(\mathrm{t}) = \mathrm{AX}(\mathrm{t}) + \mathrm{f}(\mathrm{t})$$

Решаем однородную систему,
Для этого определяем
Собственные значения

$$(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2; \\ \lambda_2 &= 1; \end{aligned}$$

Решение системы неоднородных уравнений.

Определяем собственные вектора на основе собственных значений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \qquad (A - \lambda I)\mathrm{X}_1 = 0 \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = 0$$

В итоге получим следующие значения для первого собственного вектора

$$\begin{cases} -3x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ -3x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_{11} = 2 \\ x_{21} = 3 \end{matrix}$$

По аналогии определяем компоненты второго вектора (λ_2=1)

$$\begin{cases} -2x_{21} + 2x_{22} = 0 \\ -3x_{21} + 3x_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение системы однородных уравнений.

Таким образом, решение однородного уравнения будет:

$$X_0 = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot X_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot X_2 = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

запись решения однородного уравнения в виде уравнений

$$\begin{cases} x(\mathrm{t}) = 2C_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{t} \\ y(\mathrm{t}) = 3C_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{2t} + C_2(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

Теперь можно решить не однородное уравнения, помня ,что функции C_i зависят от t. Подставим решения в исходное не однородное уравнение.

$$\begin{cases} 2C_1^{'} \cdot e^{2t} + 2C_2^{'} \cdot e^{t} = 0 \\ 3C_1^{'} \cdot e^{2t} + 2C_2^{'} \cdot e^{t} = \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = artctg(\mathrm{e}^{t}) + \mu_1 \\ C_2 = -\ln(\mathrm{e}^{t}+1) + \mu_2 \end{cases}$$

Анализ линейных динамических систем .

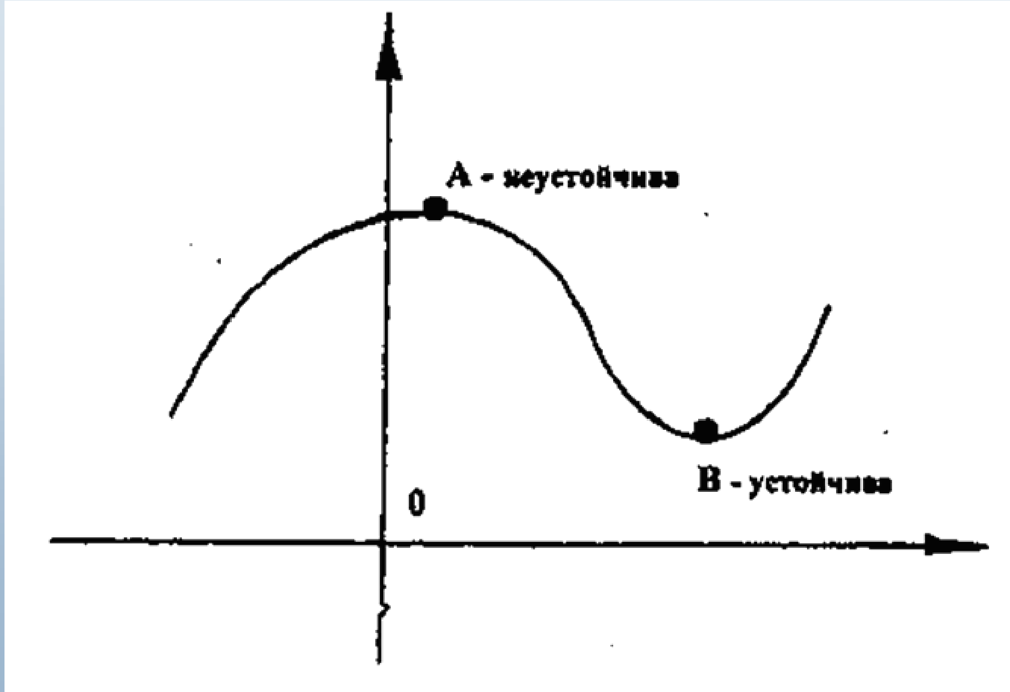
Определение 1. Система дифференциальных уравнений называется автономной если в систему не входит независимая переменная (например время).

Определение 2. Точками равновесия системы дифференциальных уравнений называются точки в которых производные равны нулю.

Для того что бы анализировать поведение экономической, логистической системы, представленной в виде набора дифференциальных уравнений нужно понимать как введет себя система во времени и в зависимости от начальных условий.

Для тог что бы провести такой анализ, часто используется так называемый анализ движений в фазовой плоскости.

Устойчивой точкой B – называется такая точка, если при малом смещении, система вновь вернется в эту точку с течением времени.



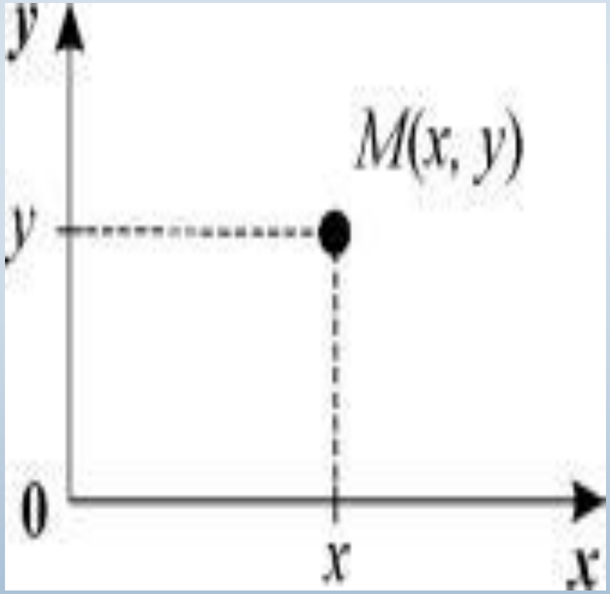
Траектории линейных систем на плоскости.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Переменные *x, y* во времени изменяются в соответствии с системой уравнений, так что каждому состоянию системы соответствует пара значений переменных (*x, y*).

Точка M(x,y) называется изображающей или представляющей точкой. Плоскость xy называется фазовой плоскостью.



Совокупность точек $M(x(t), y(t))$ на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных *x(t), y(t)* согласно уравнениям (4.1), называется *фазовой траекторией*.

Картинка, которую образуют фазовые траектории на плоскости с указанным на них направлением движения, носит название фазового портрета.

Траектории линейных систем на плоскости.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Если ad-bc ≠0 тогда поведение системы (фазовые траектории) будут зависеть от собственных чисел.

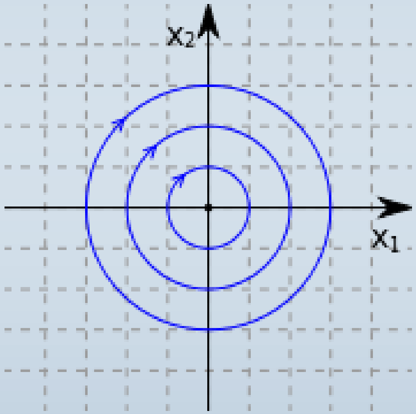
$$\begin{aligned} x(t) &= C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) &= C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

Корни характеристического Уравнения – мнимые числа

$$\lambda = \pm i\beta$$

Окружности, эллипсы

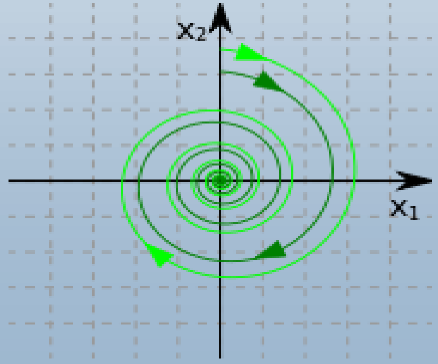


Корни характеристического Уравнения – мнимые числа,

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha < 0$$

Устойчивый Фокус, Логарифмические спирали



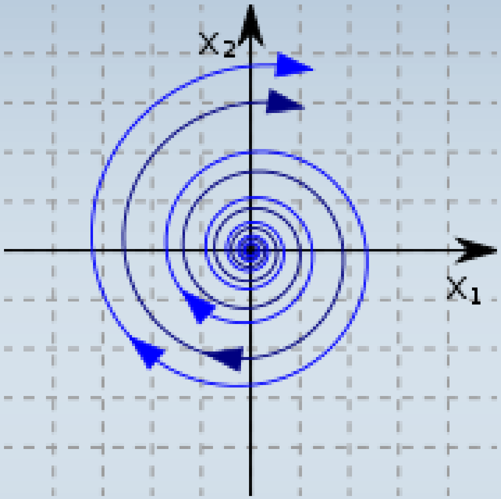
Траектории линейных систем на плоскости.

Корни характеристического
Уравнения – мнимые числа,

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha > 0$$

Неустойчивый
Фокус,
Логарифмические
спирали



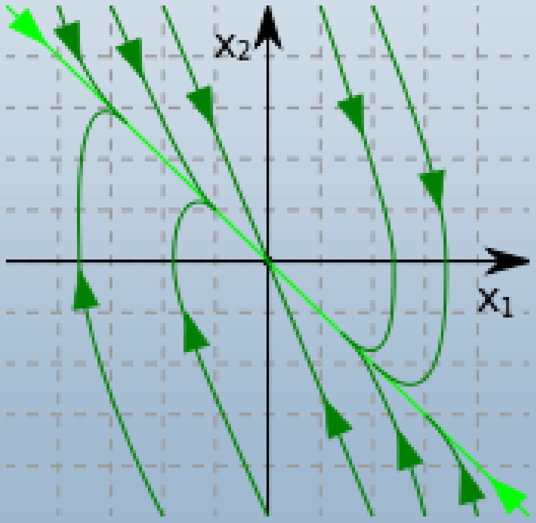
Действительные числа
и отрицательные числа

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

Устойчивый
Фокус, параболы

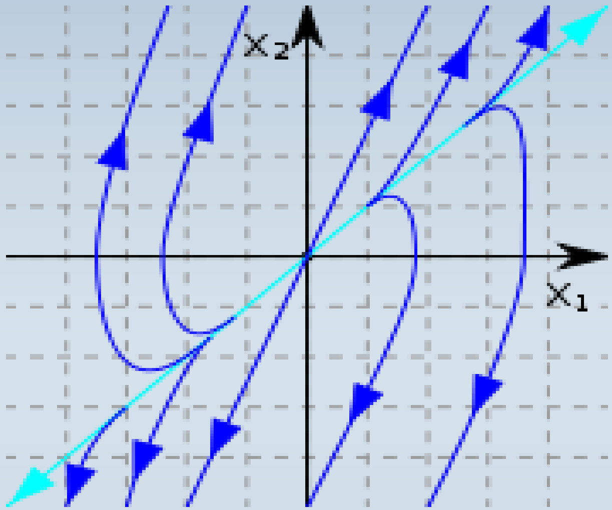


Траектории линейных систем на плоскости.

Действительные числа
и положительные числа

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$\lambda_1 > 0$$
$$\lambda_2 > 0$$

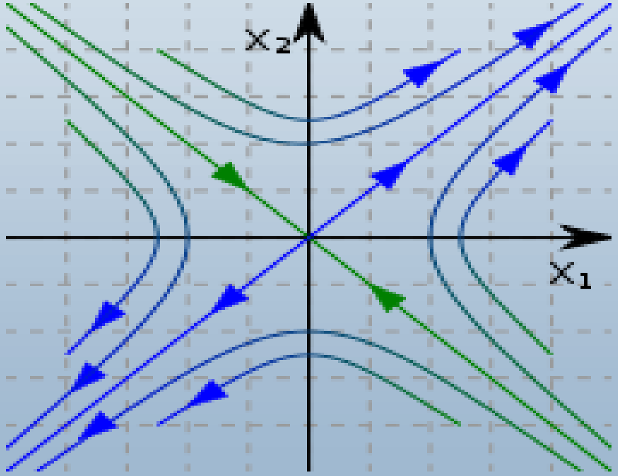
Неустойчивый узел,
параболы



Действительные и
разных знаков

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$\lambda_1 > 0$$
$$\lambda_2 < 0$$

Седло,
гиперболы



Дополнительные формулы

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

След матрицы — это сумма элементов главной диагонали матрицы

$$tr(A) = a + d$$

$$\det(A) = a \cdot d - cb$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0 = \lambda^2 - \lambda \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{d}) + (\mathrm{ad}-\mathrm{cb}) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot Tr(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{A}) = 0$$

$$\textit{Дискриминант} = (Tr(\mathrm{A}))^2 - 4 \cdot \det(\mathrm{A})$$

Если $(Tr(\mathrm{A}))^2 > 4 \cdot \det(\mathrm{A})$ то λ различны.

Модель войны или сражения

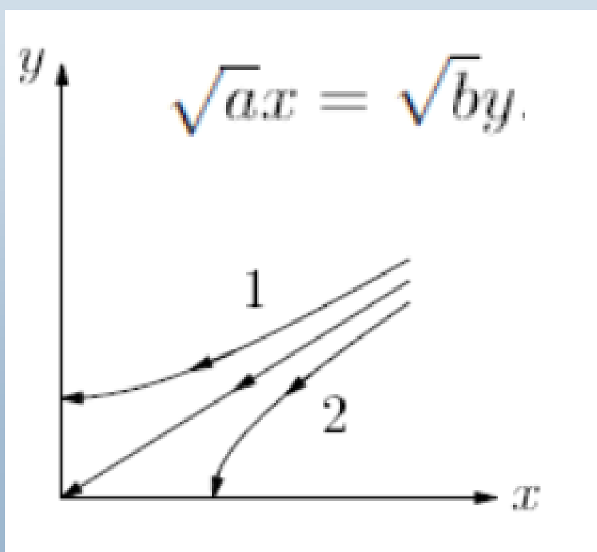
$$\begin{cases} x' = -b \cdot y \\ y' = -a \cdot x \end{cases}$$

X и **Y** это численности противостоящих армий.

$$ax\,dx = by\,dy, \qquad ax^2 - by^2 = \text{const}.$$

a - мощность оружия армии x, **b** - армии **Y**. Предполагается, что каждый солдат армии **X** убивает за единицу времени **a** солдат армии **Y** (и, соответственно, каждый солдат армии **Y** убивает **b** солдат армии **X**).

Результат военных действий в фазовом пространстве



Если начальная точка лежит выше этой прямой то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии **X** уменьшается до нуля (за конечное время). Армия **Y** выигрывает, противник уничтожен.

Вывод модели: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие

LINIS INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!