Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня

Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$, *где* $C_1, C_2 - const$

Придавая константам C_1, C_2 различные значения, можно получить бесконечно много частных решений.

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$
Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:
$(\lambda - 3)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.
Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается:
$y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x), \; где \;\; C_1, C_2 - const$

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$
Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \; где \;\; C_1, C_2 - const$

Теперь нужно найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Наша задача состоит в том, чтобы **найти ТАКИЕ значения констант** C_1, C_2**, чтобы выполнялись ОБА условия**.

Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:
$y(0) = C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$
Согласно начальному условию, получаем <u>первое уравнение</u>: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную:
$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$
Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:
$y'(0) = -2C_1 e^{-2 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$
Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>: $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

В составленной системе удобно разделить второе уравнение на 2 и почленно сложить уравнения:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2$$

$$C_2 = 1;\ C_1 = 0$$

Всё, что осталось сделать – подставить найденные значения констант $C_1 = 0;\ C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$:

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Иногда встречаются нестандартные однородные уравнения, например уравнение в виде $ry'' + py' + qy = 0$, где при второй производной есть некоторая константа r, отличная от единицы (и отличная от нуля). Алгоритм решения ничуть не меняется, следует составить характеристическое уравнение и найти его корни. Если характеристическое уравнение $r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ будет иметь два различных действительных корня, например: $\lambda_1 = -\frac{1}{2};\ \lambda_2 = \frac{1}{3}$, то общее решение запишется по обычной схеме: $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{3}},\ \text{где}\ \ C_1, C_2 - const$.

В ряде случаев из-за опечатки в условии могут получиться «некрасивые» корни, что-нибудь вроде $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{2};\ \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{2}$. Что делать, ответ придется записать так:

$$y = C_1 e^{\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)x},\ \ \text{где}\ \ C_1, C_2 - const$$

С «плохими» сопряженными комплексными корнями наподобие $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ тоже никаких проблем, общее решение:

$$y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$$

Линейные однородные уравнения высших порядков

Линейное однородное уравнение третьего порядка имеет следующий вид: $y''' + ry'' + py' + qy = 0$, где r, p, q – константы.
Для данного уравнения тоже нужно составить характеристическое уравнение и уравнение и найти его корни. Характеристическое уравнение, как многие

догадались, выглядит так:
$\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, и оно в любом случае имеет **ровно три** корня.

Пусть, например, все корни действительны и различны: $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 5$, тогда общее решение запишется следующим образом:
$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + C_3e^{5x},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Если один корень действительный $\lambda_1 = 2$, а два других – сопряженные комплексные $\lambda_{2,3} = \sqrt{3} \pm 5i$, то общее решение записываем так:
$y = C_1e^{2x} + e^{\sqrt{3}x}(C_2\cos 5x + C_3\sin 5x),\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Особый случай, когда все три корня кратны (одинаковы). Рассмотрим простейшие однородное ДУ 3-го порядка следующего типа: $y''' = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^3 = 0$ имеет три совпавших нулевых корня $\lambda_{1,2,3} = 0$. Общее решение записываем так:
$y = C_1 + C_2x + C_3x^2,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Если характеристическое уравнение $\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет, например, три кратных корня $\lambda_{1,2,3} = -1$, то общее решение, соответственно, такое:
$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка
$y''' + y' = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^3 + \lambda = 0$
$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$ с начальными условиями $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

Решение: В задачах чаще всего система встречается с начальными условиями.

Решим систему **методом исключения**. Напоминаю, что суть метода – свести систему к одному дифференциальному уравнению

Алгоритм решения стандартен:

1) Берем **второе уравнение системы** $\frac{dy}{dt} = -x + 3y$ и выражаем из него x:

$x = -\frac{dy}{dt} + 3y \quad (*)$

2) Дифференцируем по t обе части полученного уравнения $x = -\frac{dy}{dt} + 3y$:

$\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}$

Со «штрихами» процесс выглядит так:

$(x)' = (-y' + 3y)'$

$x' = -y'' + 3y'$

Важно, чтобы этот простой момент был понятен,

3) Подставим $x = -\frac{dy}{dt} + 3y$ и $\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}$ в первое уравнение системы $\frac{dx}{dt} = -2x + 4y$:

$-\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = -2\left(-\frac{dy}{dt} + 3y\right) + 4y$

И проведём максимальные упрощения:

$-\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 2\frac{dy}{dt} - 6y + 4y$

$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0$

Получено самое что ни на есть обычное **однородное уравнение второго порядка** с постоянными коэффициентами. Со «штрихами» оно записывается так: $y'' - y' - 2y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \ \sqrt{D} = 3$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому:

$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$.

Одна из функций найдена, пол пути позади.

4) Идём за функцией $x(t)$. Для этого берём уже найденную функцию $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ и находим её производную. Дифференцируем по t:

$y'(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{2t})' = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$

Подставим $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ и $y'(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$ в уравнение (*):

$$x(t) = -\frac{dy}{dt} + 3y = -(-C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}) + 3(C_1e^{-t} + C_2e^{2t}) =$$
$$= C_1e^{-t} - 2C_2e^{2t} + 3C_1e^{-t} + 3C_2e^{2t} = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$$

Или короче: $x(t) = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$

5) Обе функции найдены, запишем общее решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases}, \quad \textit{где} \quad C_1, C_2 - const$$

6) Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0) = 3$, $y(0) = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = 4C_1 + C_2 = 3 \\ y(0) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 1;\ C_2 = -1$$

Ответ: частное решение: $\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{2t} \end{cases}$

Найти частное решение системы линейных ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3 \\ y' = 5x - 6y + 1 \end{cases} \quad x(0) = 6,\ y(0) = 5$$

Решение: Дана линейная неоднородная система дифференциальных уравнений, в качестве «добавок» $f(t), g(t)$ выступают константы. Используем **метод исключения**.

1) Из первого уравнения системы выражаем:

$$y = \frac{1}{5}\left(-\frac{dx}{dt} + 2x + 3\right) \quad (*)$$

Это важная штуковина, поэтому я её снова замаркирую звёздочкой. Скобки лучше не раскрывать, зачем лишние дроби?

И еще раз заметьте, что из первого уравнения выражается именно «игрек» – через два «икса» и константу.

2) Дифференцируем по t обе части:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\left(-\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}\right)$$

Константа (тройка) исчезла, ввиду того, что производная константы равна нулю.

3) Подставим $y = \frac{1}{5}\left(-\frac{dx}{dt} + 2x + 3\right)$ и $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\left(-\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}\right)$ во второе уравнение системы $\frac{dy}{dt} = 5x - 6y + 1$:

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}\right) = 5x - 6\cdot\frac{1}{5}\left(-\frac{dx}{dt} + 2x + 3\right) + 1$$

Сразу после подстановки целесообразно избавиться от дробей, для этого каждую часть уравнения умножаем на 5:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}=25x-6\cdot\left(-\frac{dx}{dt}+2x+3\right)+5$$

Теперь проводим упрощения:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}=25x+6\frac{dx}{dt}-12x-18+5$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+13x=13$$

В результате получено **линейное неоднородное уравнение второго порядка** с постоянными коэффициентами.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+13x=0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+4\lambda+13=0$$

$$D=16-52=-36$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm 6i}{2}$$

$\lambda_{1,2}=-2\pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому:

$X=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{x}=A$.
Найдем первую и вторую производную:

$$\tilde{x}'=0$$

$$\tilde{x}''=0$$

Подставим $\tilde{x},\tilde{x}',\tilde{x}''$ в левую часть неоднородного уравнения:

$$0+4\cdot 0+13A=13$$

$$13A=13$$

$$A=1$$

Таким образом: $\tilde{x}=1$

Следует отметить, что частное решение $\tilde{x}=1$ легко подбирается устно, и вполне допустимо вместо длинных выкладок написать: «Очевидно, что частное решение неоднородного уравнения: $\tilde{x}=1$».

В результате: $x(t)=X+\tilde{x}=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+1$

4) Ищем функцию $y(t)$. Сначала находим производную от уже найденной функции $x(t)$:

$$x'(t)=(e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+1)'=(e^{-2t})'(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)'+0=$$
$$=-2e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+e^{-2t}(-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t)=$$
$$=e^{-2t}(-2C_1\cos 3t-2C_2\sin 3t-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t)=e^{-2t}((-2C_1+3C_2)\cos 3t+(-3C_1-2C_2)\sin 3t)$$

Подставим $x(t)=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+1$

и $x'(t)=e^{-2t}((-2C_1+3C_2)\cos 3t+(-3C_1-2C_2)\sin 3t)$ в уравнение (*):

$$y(t)=\frac{1}{5}\left(-\frac{dx}{dt}+2x+3\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-e^{-2t}((-2C_1+3C_2)\cos 3t+(-3C_1-2C_2)\sin 3t)+2(e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+1)+3\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}((2C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+2C_2)\sin 3t)+e^{-2t}(2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t)+2+3\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}((2C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+2C_2)\sin 3t+2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t)+5\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(e^{-2t}((2C_1-3C_2+2C_1)\cos 3t+(3C_1+2C_2+2C_2)\sin 3t)+5\right)=$$

$$=e^{-2t}\left(\left(\frac{4C_1-3C_2}{5}\right)\cos 3t+\left(\frac{3C_1+4C_2}{5}\right)\sin 3t\right)+1$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases}x(t)=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)+1\\ y(t)=e^{-2t}\left(\left(\frac{4C_1-3C_2}{5}\right)\cos 3t+\left(\frac{3C_1+4C_2}{5}\right)\sin 3t\right)+1\end{cases},\quad \text{где}\quad C_1,C_2-const$$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0)=6,\ y(0)=5$:

$$\begin{cases}x(0)=C_1+1=6\\ y(0)=\frac{4C_1-3C_2}{5}+1=5\end{cases}\Rightarrow C_1=5$$

$$\frac{20-3C_2}{5}=4\Rightarrow 20-3C_2=20\Rightarrow C_2=0$$

Окончательно, частное решение:

$$\begin{cases}x(t)=e^{-2t}(5\cos 3t+0\cdot\sin 3t)+1\\ y(t)=e^{-2t}\left(\left(\frac{20-0}{5}\right)\cos 3t+\left(\frac{15+0}{5}\right)\sin 3t\right)+1\end{cases}$$

Ответ: частное решение: $\begin{cases}x(t)=5e^{-2t}\cos 3t+1\\ y(t)=e^{-2t}(4\cos 3t+3\sin 3t)+1\end{cases}$

Дана линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-5y\\ \frac{dy}{dt}=-7x-3y\end{cases}$$

Найти общее решение системы уравнений с помощью характеристического уравнения

Решение: Смотрим на систему уравнений и составляем определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$$

По какому принципу составлен определитель, думаю, всем видно.

Составим характеристическое уравнение, для этого из каждого числа, которое располагается на *главной диагонали*, вычитаем некоторый параметр k:

$$\begin{vmatrix} -1-k & -5 \\ -7 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

На чистовике, естественно, сразу следует записать характеристическое уравнение, я объясняю подробно, по шагам, чтобы было понятно, что откуда взялось.

Раскрываем определитель:

$$(1+k)(3+k)-35=0$$

$$k^2+4k-32=0$$

И находим корни квадратного уравнения:

$$D=16+128=144;\ \sqrt{D}=12$$

$$k_1=\frac{-4-12}{2}=-8,\quad k_2=\frac{-4+12}{2}=4$$

Если характеристическое уравнение имеет **два различных действительных корня**, то общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x(t)=C_1\lambda_1 e^{k_1 t}+C_2\lambda_2 e^{k_2 t} \\ y(t)=C_1\mu_1 e^{k_1 t}+C_2\mu_2 e^{k_2 t} \end{cases},\ \text{где } C_1, C_2 - const$$

Коэффициенты в показателях экспонент k_1, k_2 нам уже известны, осталось найти коэффициенты $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$

1) Рассмотрим корень $k_1=-8$ и подставим его в характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-(-8) & -5 \\ -7 & -3-(-8) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

(эти два определителя на чистовике тоже можно не записывать, а сразу устно составить нижеприведенную систему)

Из чисел определителя составим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 7\lambda_1-5\mu_1=0 \\ -7\lambda_1+5\mu_1=0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство:

$$\mu_1=\frac{7}{5}\lambda_1$$

Теперь нужно подобрать *наименьшее* значение λ_1, такое, чтобы значение μ_1 было целым. Очевидно, что следует задать $\lambda_1 = 5$. А если $\lambda_1 = 5$, то $\mu_1 = \frac{7}{5} \cdot 5 = 7$

2) Всё аналогично. Рассмотрим корень $k_2 = 4$ и устно подставим его в характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-4 & -5 \\ -7 & -3-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Из чисел определителя составим систему:

$$\begin{cases} -5\lambda_2 - 5\mu_2 = 0 \\ -7\lambda_2 - 7\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует равенство:

$$\mu_2 = -\lambda_2$$

Подбираем *наименьшее* значение λ_2, таким образом, чтобы значение μ_2 было целым. Очевидно, что $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = -1$.

Все четыре коэффициента $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ найдены, осталось их подставить в общую формулу $\begin{cases} x(t) = C_1\lambda_1 e^{k_1 t} + C_2\lambda_2 e^{k_2 t} \\ y(t) = C_1\mu_1 e^{k_1 t} + C_2\mu_2 e^{k_2 t} \end{cases}$

Ответ: общее решение: $\begin{cases} x(t) = 5C_1 e^{-8t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) = 7C_1 e^{-8t} - C_2 e^{4t} \end{cases}$, *где* $C_1, C_2 - const$