Комплексные числа

Кольцов С.Н.

www.linis.ru

Определение и операции над комплексными числами.

Определение. Комплексным числом называется пара действительных чисел z = (x, y), x, y ∈ R, взятая следующим образом.

Алгебраическая форма комплексного числа

z=a + ib, где *a* и *b* – любые действительные числа, **i** – специальное число, которое называется мнимой единицей. **a – называется действительной частью числа, b – называется мнимой частью числа.**

Для таких выражений понятия равенства и операции сложения, вычитания и умножения вводятся следующим образом:

Два комплексных числа z1=***a + ib*** и z2=***c + id*** называются равными тогда и только тогда, когда ***a = c* и *b = d*.**

Суммой двух комплексных чисел z1=***a + ib*** и z2=***c + id*** называется комплексное число ***a + c + i*(*b + d*).**

Разность: z1 − z2 = (a1 − a2, b1 − b2).

Произведением двух комплексных чисел z1= ***a + ib*** и z2= ***c + id*** называется комплексное число ***ac – bd + i*(*ad + bc*).**

Определение и операции над комплексными числами.

Комплексное число **z=a - ib** называется **сопряженным** с комплексны число **z = a + ib** и обозначается:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Частным комплексных чисел z1 и z2 называется комплексное число z такое, что z1 · z = z2.

$$z = \frac{z_2 \cdot \bar{z}_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{z_2}{z_1},$$

Свойства арифметических операций

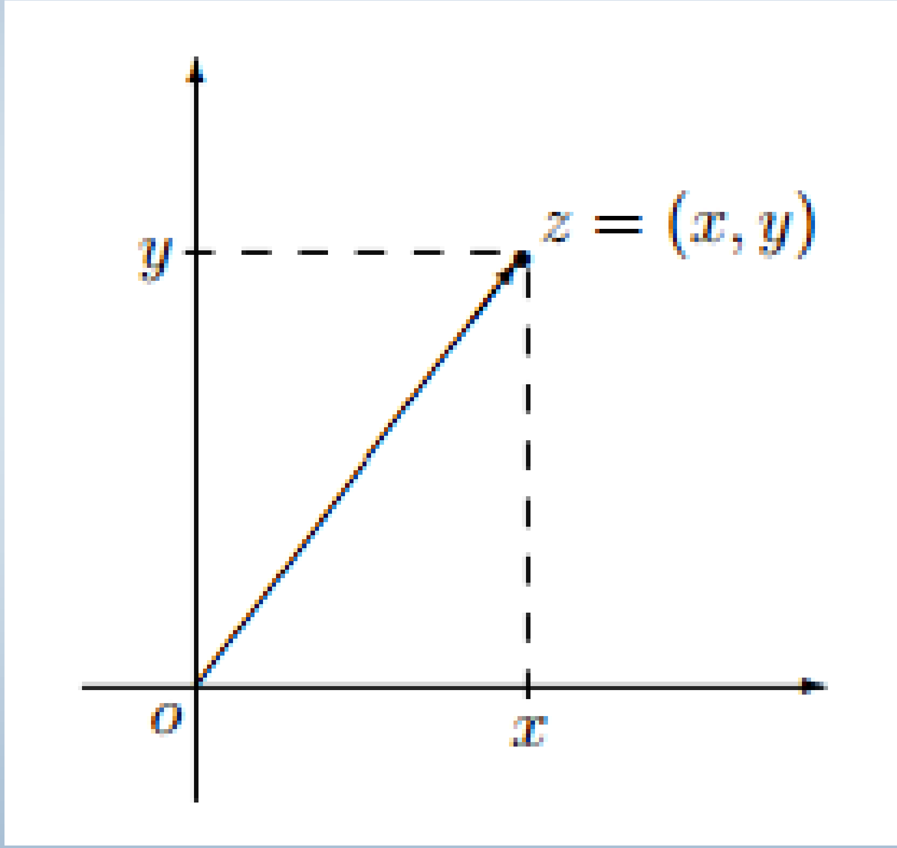
1. **Коммутативность**: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. **Ассоциативность**: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

3. **Дистрибутивность**: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

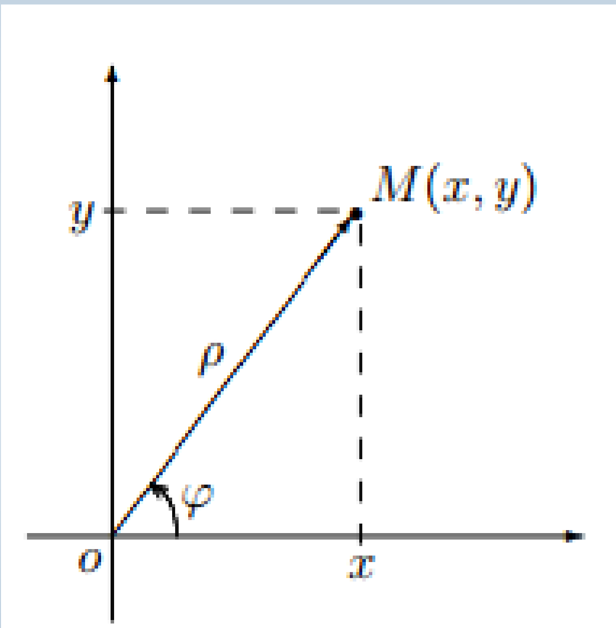
Геометрическое изображение комплексных чисел

Любое комплексное число **z = x + iy** изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые - точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат - мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной числовой плоскостью (обозначение: C).



Понятие о модуле и аргументе комплексного числа.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ - модуль комплексного числа $z = x + iy$.



Угол ϕ, образованный вектором OM с осью x, называется **аргументом комплексного числа z** и обозначается **ϕ = Arg z**. Определяется аргумент ϕ не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Arg z = arg z + 2kπ, k = 0, ±1, ±2, . . .

Принимая ρ и ϕ за полярные координаты точки **z = (x, y),** имеем: **x = ρ cos ϕ, y = ρ sin ϕ.** Отсюда следует тригонометрическая форма записи комплексного числа: **z = ρ(cos ϕ + isin ϕ).**

Извлечение корня.

Определение. Если z = ρ(cos ϕ + isin ϕ), где ρ = |z|, ϕ = arg z, то √n z мы определим как комплексное число, которое, будучи возведённым в степень n, равно z: $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z.$

Модуль числа $\sqrt[n]{z}$, очевидно, будет равен $\sqrt[n]{\rho}$,

аргумент же будет равен $\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$