Задачи линейного программирования. Исследование функций многих переменных.

Кольцов С.Н

2014

www.linis.ru

Задачи математического программирования

1.Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б. Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Кун обобщил этот метод, после чего он стал называться «венгерским» методом.

2. В 1939 году российский математик Л.В. Канторович впервые сформулировал задачу оптимального (то есть наилучшего из всех возможных вариантов при определенных ограничениях) использования ограниченных производственных ресурсов.

3. В 1947 году американский ученый Дж. Данциг занимаясь планированием в оборонной сфере, где разрабатывал программы совершенствования военно-воздушных сил США, в 1947 г. повторно и независимо сформулировал задачу оптимизации и соответствующий математический аппарат, который назвал „линейное программирование"

4.В 1951 году была опубликована работа Куна и Таккера, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования.

Задачи линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования. Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. **Потому что**:

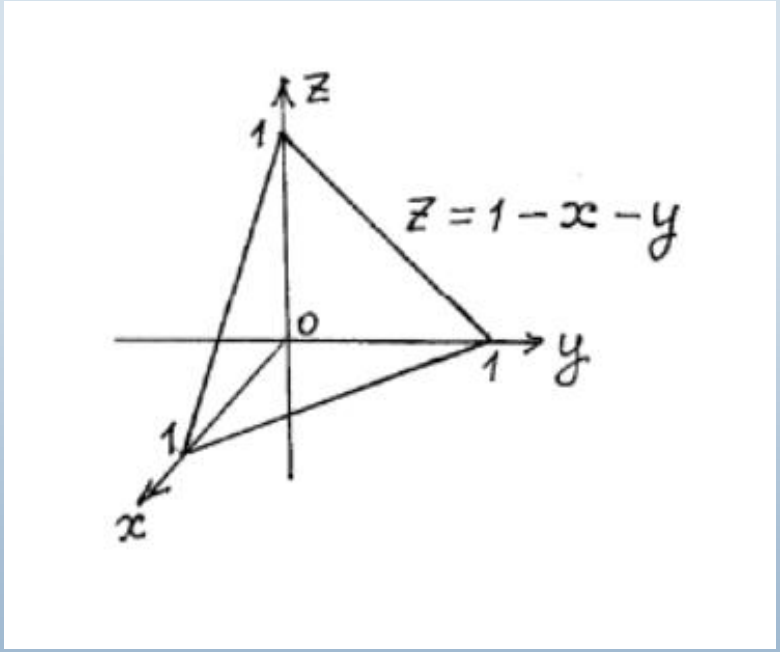
1. Математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
2. Для линейных задач разработаны специальные численные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на ЭВМ;

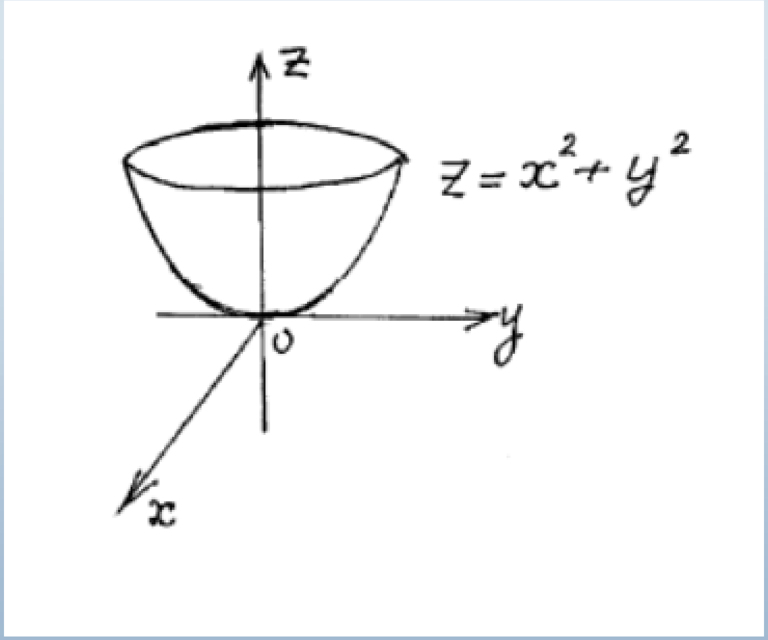
3. Некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными.

Таким образом, ***Линейное программирование*** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Теория функции многих переменных

Определение, переменная z называется функцией переменных x и y, если каждой паре переменных сопоставляется определенное значение z. Переменные x, y называются аргументами многомерной функции z. Двумерную функцию z=f(x,y) можно представить в виде поверхности в трехмерной пространстве.





Производная функции многих переменных

Частные производные. Рассмотрим функцию двух переменных z=f(x,y). Зафиксируем переменную Y_0. тогда наша двумерная функция превратится в одномерную функцию. Тогда производная по X будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x z}{\triangle x},$$

где $$\triangle_x z = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

называется частным приращением функции z. Соответственно производная по x, при фиксированной переменной y, называется частной производной в точке (x_0, y_0):

$$f'_x(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Производная функции многих переменных

Производная по X имеет разные значения, при разных у, так как у нас функция двух переменных. Частная производная обозначается следующим образом:

$$f'_x(x,y) \quad \text{или} \quad z'_x(x,y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично находится производная по переменной Y.

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y z}{\triangle y}.$$

Принцип нахождения частной производной такой же как и для функции одной переменной, нужно только помнить, что если мы находим производную по X, то Y считается константой.

Пример.

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

$$z'_x = 2xy^3 + 12x^2y^2 + 5$$

$$z'_y = 3x^2y^2 + 8x^3y - 4$$

Частные производные высших порядков

Частной производной второго порядка называется производные от первой производной.

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Смешанные производные

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Расположение символов по x и y, dx, dy соответствует порядку дифференцирования.

Частные производные высших порядков

Пример. $z = \sin(xy).$

Первая производная: $z'_x = y\cos(xy),$ $z'_y = x\cos(xy),$

Вторая производная:

$$z''_{xx} = (y\cos(xy))'_x = -y^2\sin(xy),$$

$$z''_{yy} = (x\cos(xy))'_y = -x^2\sin(xy)$$

Смешанные производные: $z''_{xy} = (y\cos(xy))'_y = \cos(xy) - xy\sin(xy)$

$$z''_{yx} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Экстремум функции двух переменных

Окрестностью радиуса δ точки (x_0, y_0) называется множество всех точек P(x,y), удовлетворяющих неравенству:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

Точки M(x_0, y_0) называется точкой максимума функции z=f(z,y), если существует такая δ окрестность этой точки в которой:

$$f(x_0,y_0)\geqslant f(x,y)$$

Точки M(x_0, y_0) называется точкой минимума функции z=f(z,y), если существует такая δ окрестность этой точки в которой:

$$f(x_0,y_0)\leqslant f(x,y)$$

Необходимые условия экстремума. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют называются критическими. Если функция имеет точки экстремума, то они находятся среди критических точек, однако обратное неверно. То есть, если точка является критической, не значит что функция в данной точке имеет экстремальное значение.

Экстремум функции двух переменных

Достаточные условия экстремума. Пусть наша двумерная функция имеет производные до второго порядка включительно в точке (x_0, y_0). Кроме того данная точка является критической точкой. Построим матрицу, компоненты которой являются частные производные второго порядка.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Вычислим детерминант этой матрицы **Δ=AC-BB**.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0); \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0); \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0).$$

если $\Delta > 0$, то M_0 — точка экстремума:

а) если $A > 0$,то M_0 — точка минимума;

б) если < 0, то $_0$ — точка максимума;

если $\Delta < 0$, то в точке $_0$ нет экстремума;

Ситуацию когда **Δ=0 не рассматриваем.**

Экстремум функции двух переменных

Пример. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

Проведем исследование на экстремум данную функцию. Прежде всего найдем критические точки. То есть приравняем нулю первые производные.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0,0) \quad M_2(1, \tfrac{1}{2})$$

Теперь определим максимум или минимум функции в найденных точках. Для этого найдем частные вторые производные и посчитаем детерминант.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Детерминант в точке M_1 $\Delta(M_1) = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$

Детерминант в точке M_2

$$\Delta(M_2) = 108 > 0, \ A > 0, \text{ значит, в точке } M_2 \text{ — минимум.}$$

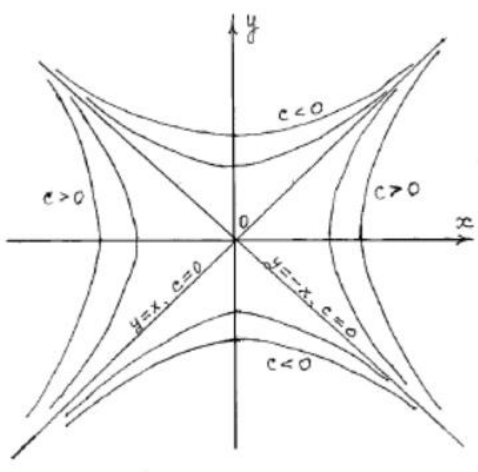
Скалярное поле

Если в каждой точке пространства задана величина u как функция от некоторой величины, то говорят что заданно поле данной величины. Поле может быть скалярным или векторным. Введем в системе декартову систему координат. Задание поля скалярного поля эквивалентно заданию функции u=f(x,y,z). Если функция задана в плоскости то говорят, что заданно плоское поле. Совокупность точек в которых u постоянно u=const описывается кривыми – уровнями скалярного поля.

Пример. $u = x^2 - y^2$ Линии уровня определяются константой.

$$x^2 - y^2 = c, c = const.$$

При $c \neq 0$ получаем семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$.



Производная по направлению, градиент

Важной характеристикой является скорость изменения поля в заданном направлении l. Пусть у нас есть функция z=f(x,y) дифференцируемая в точке M(x,y), тогда производная в направлении вектора l вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,$$

где cos(α) и cos(β) – направляющие косинусы вектора l=(X,Y), которые находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\bar{\ell}|}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\bar{\ell}|}; \quad |\bar{\ell}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

В случае трехмерного поля: **u=f(x,y, z)**

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{|\bar{\ell}|}; \\ \cos\beta &= \frac{Y}{|\bar{\ell}|}; \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{|\bar{\ell}|}; \end{aligned}\right\}$$

Производная по направлению, градиент

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \iff \frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}\right)\cdot\left(\cos\alpha\cdot\bar{i} + \cos\beta\cdot\bar{j}\right)$$

Левая формула может быть представлена в виде скалярного произведения.

При этом $$\overline{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}.$$ - называется градиентом скалярного поля.

$$\overline{\ell^0} = \cos\alpha\cdot\bar{i} + \cos\beta\cdot\bar{j}$$ - единичный вектор.

В случае трехмерного поля: $$\overline{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Свойства градиента:

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня.
2. Градиент направлен в сторону возрастания поля.
3. Модуль градиента равен наибольшей производной по направлению .

То есть градиент показывает величину и направление наибольшего роста функции.

Производная по направлению, градиент

Пример 1. $u = x - 2y + 3z$ Частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3.$

Тогда градиент имеет следующий вид: $\overline{\text{grad}}\, u = 1 \cdot \bar{i} + (-2) \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k},$

Пример 2. $u = x^3 - xy$ Найдем градиент в точки M(1,2) в направлении вектора: $\bar{a} = 5\bar{i} - 3\bar{j}.$

Частные производные в точке M(1,2)

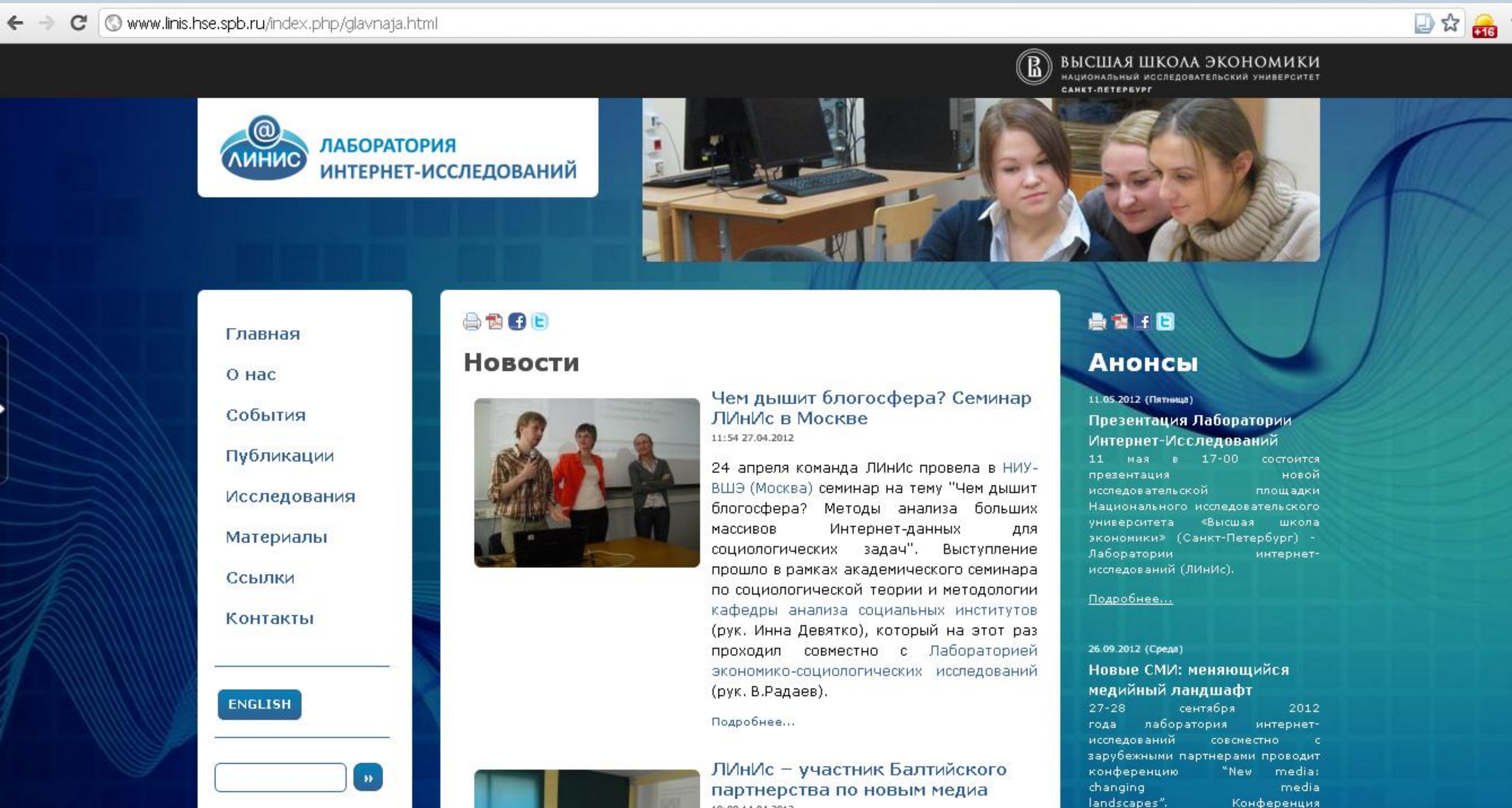
$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{M(1,2)} = (3x^2 - y)|_{x=1,y=2} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}|_{M(1,2)} = -x|_{x=1,y=2} = -1$$

Направляющие косинусы находятся по формуле $(\overline{\text{grad}}\, u)_M = \bar{i} - \bar{j} = \{1, \ -1\}$

Модуль $|\bar{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ Направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{34}}$

Решение $\frac{\partial u}{\partial a} = 1 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} + (-1) \cdot (\frac{-3}{\sqrt{34}}) = \frac{8}{\sqrt{34}}$

THANK YOU!


www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ЛИНИС
ЛАБОРАТОРИЯ
ИНТЕРНЕТ-ИССЛЕДОВАНИЙ
Главная
О нас
События
Публикации
Исследования
Материалы
Ссылки
Контакты
ENGLISH
Новости
Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИнИс в Москве
11:54 27.04.2012
24 апреля команда ЛИнИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радаев).
Подробнее...
ЛИнИс – участник Балтийского партнерства по новым медиа
Анонсы
11.05.2012 (Пятница)
Презентация Лаборатории Интернет-Исследований
11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИнИс).
Подробнее...
26.09.2012 (Среда)
Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт
27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совсместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция