

Нелинейная задача оптимизации.

Кольцов С.Н
2014

www.linis.ru

Задачами нелинейного программирования

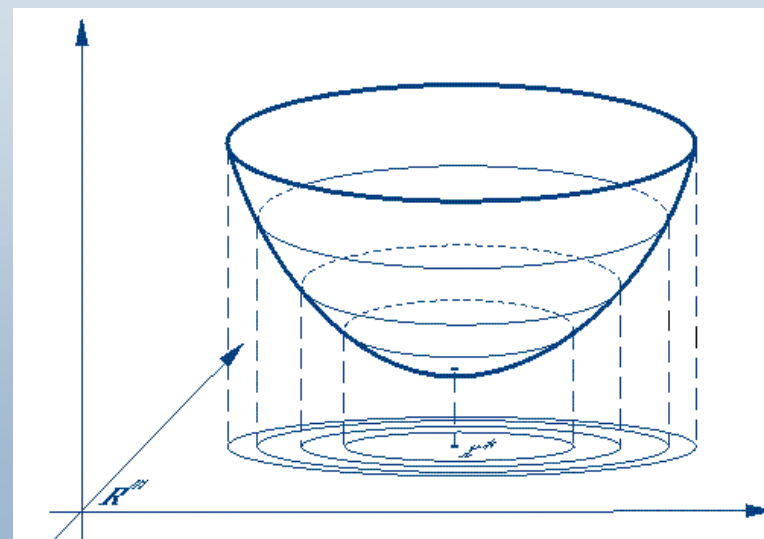
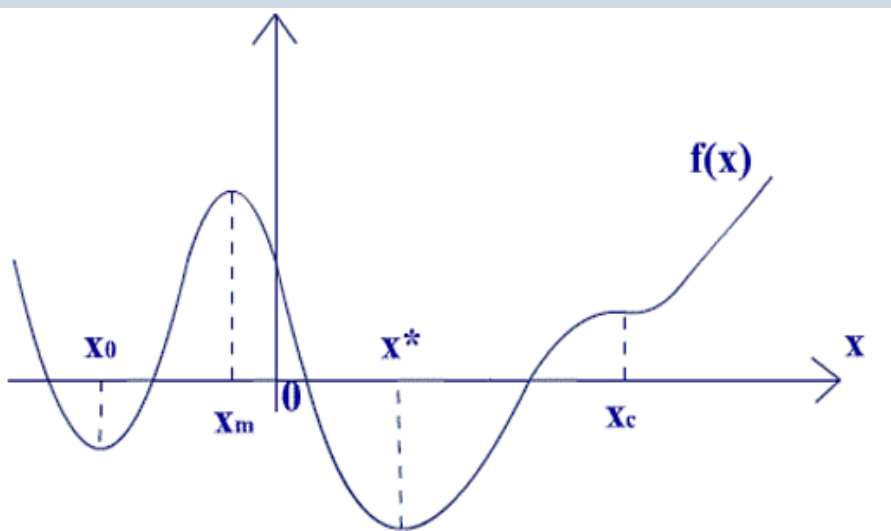
Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции $F(x)$, функциями ограничений и размерностью вектора x (вектора решений). В самом общем виде классификация представлена в таблице.

Вид $F(x)$	Вид функции ограничений	Число переменных x	Название задачи
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Задача безусловной оптимизации

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений. Несмотря на то что большинство практических задач оптимизации содержит ограничения, изучение методов безусловной оптимизации важно с нескольких точек зрения. Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают сведение ее к последовательности задач безусловной оптимизации. Другой класс методов основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.



Задача безусловной оптимизации

Задача оптимизации формулируется следующим образом:
заданы множество X (допустимое множество задачи) и функция $f(x)$ (целевая функция), определенная на X ; **требуется найти точки минимума или максимума функции $f(x)$ на X .** Задача оптимизации, в которой целевая функция подлежит минимизации, имеет вид:

$$f(x) \rightarrow \min, \\ x \in X.$$

Точка $x^* \in X$ называется *точкой глобального минимума* $f(x)$ на множестве X , или *глобальным решением задачи*, если

$$f(x^*) < f(x) \text{ при всех } x \in X.$$

Точка $x^* \in X$ называется *точкой локального минимума* $f(x)$ на множестве X , или *глобальным решением задачи*, если

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всех } x \in X \cap V_\varepsilon(x^*),$$

где $V_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ – шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x^* (ε - окрестность точки x^*).

Задача безусловной оптимизации для одномерной функции

Необходимое условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}$. Если x^* – точка локального оптимума (экстремума), то

$$f'(x^*) = 0.$$

Точки, удовлетворяющие вышеуказанному условию, называются **стационарными**. Стационарные точки могут быть и точками **локального минимума**, и точками **локального максимума**, и точками **перегиба**.

Достаточное условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ k раз, $k > 1$, дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}$, причем

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Тогда, если k – четное число, то x^* – точка локального минимума (максимума) при $f^{(k)}(x^*) > 0$ (при $f^{(k)}(x^*) < 0$). Если k – нечетное число, то x^* – точка перегиба.

Принцип определения точек глобального экстремума.

Для определения точек глобальных экстремумов вычисляются предельные (при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$) значения $f(x)$. Если

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty$$

то $f(x)$ не имеет конечного **глобального максимума**. Если

$$W \equiv \min \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = -\infty$$

то $f(x)$ не имеет конечного **глобального минимума**.

Если $f(x)$ имеет конечный глобальный максимум и (или) конечный глобальный минимум, то для их определения вычисляются также значения $f(x)$ на множестве точек локальных экстремумов. Наименьшее из полученных значений, т.е. Значений $f(x)$ в точках локальных экстремумов и предельных значений $f(x)$, определяет точку глобального минимума, наибольшее из полученных значений – точку глобального максимума $f(x)$.

Алгоритм определения точек локальных и глобальных экстремумов функции одной переменной

Пусть у нас есть целевая функция $f(x)$:

1. Находится $f'(x)$.
2. Вычисляются корни уравнения $f'(x) = 0$ – *стационарные точки* $x(i)$, $i \in I = \{ 1, 2, \dots, N \}$, где N – *число стационарных точек*.
3. Находится $f''(x)$.,
4. Вычисляются значения $f''(x)$, то есть, ищем значения полученных функций в стационарных точках.
5. Если $f''(x) \neq 0$ то определяется тип стационарной точки $x(i)$, то есть определяем максимум (минимум) или точку перегиба.
7. Вычисляются предельные (при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$) значения $f(x)$.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции. **Пример 1.**

Пусть есть функция:

$$f(x) = (1 - x)^3.$$

1. Находим первую производную $f'(x)$:

$$f'(x) = -3(1 - x)^2.$$

2. Вычисляем корни уравнения $f'(x) = 0$:

$$-3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow (1 - x)^2 = 0 \rightarrow x_{(1)} = 1.$$

Получили одну стационарную точку:

$$x_{(1)} = 1.$$

Теперь определяем характер стационарной точки.

Для этой цели ищем следующие производные нашей целевой функции

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

3. Находим вторую производную $f(x)$: $f''(x) = 6(1 - x).$

4. Вычисляем значение второй производной в стационарной точке $x=1$.

$$f''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Так как у нас значение второй производной в стационарной точке равно нулю, то ищем следующую производную и определяем значение этой производной в стационарной точке.

5. Значение третьей производной в точке $x=1$.

$$f'''(x) = -6 \neq 0.$$

Так как у нас не нулевая производная нечетная, следовательно точка $x=1$ является точкой перегиба.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

Теперь определяем глобальные максимумы (минимумы):

Вычисляем предельные значения $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) \right\}^3 = (1-\infty)^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \right\}^3 = (1+\infty)^3 = \infty.$$

Поскольку

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty,$$

то $f(x)$ не имеет конечного глобального максимума.

Поскольку

$$W \equiv \min \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = -\infty,$$

то $f(x)$ не имеет конечного глобального минимума.

Ответ: функция $f(x) = (1-x)^3$ экстремумов не имеет.

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции. **Пример 2.**

Пусть есть функция: $f(x) = (1 - x)^4.$

1. Находим первую производную $f'(x)$:

$$f'(x) = -4(1 - x)^3.$$

2. Вычисляем корни уравнения:

$$-4(1 - x)^3 = 0 \rightarrow (1 - x)^3 = 0 \rightarrow x_{(1)} = 1.$$

3. Определяем характер стационарной точки.

$$f''(x) = 12(1 - x)^2.$$



$$f''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Пример определения локальных и глобальных экстремумов функции.

$$f'''(x) = -24(1 - x).$$



$$f'''(x_{(1)} = 1) = 0.$$

Поскольку характер стационарной точки не определен, то находим четвертую производную $f^{(4)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = 24 \neq 0.$$

Так как у нас 4 производная (четная) и она положительная в стационарной точке, то наша точка является точкой локального минимума.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x)^4 = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x) \right\}^4 = (1 - \infty)^4 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)^4 = \left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) \right\}^4 = (1 + \infty)^4 = \infty.$$

Поскольку

$$V \equiv \max \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right\} = +\infty,$$

$f(x)$ не имеет конечного глобального максимума, и имеется глобальный минимум.

Задача безусловной оптимизации для функции двух переменных.

Для функции $f(x)$ многих переменных точка x представляет собой вектор, $f'(x)$ – вектор первых производных (градиент) функции $f(x)$, $f''(x)$ – симметричную матрицу вторых частных производных (матрицу Гессе – гессиан) функции $f(x)$.

Необходимое условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in R$. Если x^* – точка локального экстремума, то

$$f'(x^*) = 0.$$

Характер стационарной точки x^* связан со знакоопределенностью матрицы Гессе $f''(x^*)$.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^T dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Задача безусловной оптимизации для функции двух переменных.

Достаточное условие локальной оптимальности. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in \mathbb{R}^2$, причем $f'(x^*) = 0$, т.е. x^* – стационарная точка.

Тогда, если матрица $f''(x^*)$ является положительно (отрицательно) определенной, то x^* – **точка локального минимума (максимума)**;

если матрица $f''(x^*)$ является неопределенной, то x^* – **седловая точка**.

Если матрица $f''(x^*)$ является неотрицательно (неположительно) определенной, то для определения характера стационарной точки x^* требуется исследование производных более высокого порядка.

Для проверки знакоопределенности матрицы, используется **критерий Сильвестра**. Согласно этому критерию, симметричная матрица A является положительно определенной в том и только том случае, если все ее угловые миноры положительны. При этом угловым минором матрицы A называется определитель матрицы, построенной из элементов матрицы A , стоящих на пересечении строк и столбцов с одинаковыми (причем первыми) номерами

Что такое угловой минор.

Пусть матрица квадратичной формы $f(x) = x^T A x$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Рассмотрим **угловые миноры** этой матрицы (которые также называют **главными минорами**):

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Как видим, угловой минор порядка k расположен на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n -го порядка представляет собой определитель матрицы.

Матрица является отрицательно определенной, если ее главные миноры имеют чередующиеся знаки, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \dots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0$$

Алгоритм определения точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Пусть у нас есть целевая функция $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

1. Находится $f'(x)$.

2. Решается система

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

3. Вычисляются стационарные точки

4. Находится $f''(x)$, и вычисляем значение производных в стационарных точках.

5. Вычисляются угловые миноры матрицы $f''(x(i))$.

Алгоритм определения точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Если не все угловые миноры ненулевые, то для определения характера стационарной точки $x(i)$ требуется исследование производных более высокого порядка.

6. Анализируются знаки угловых миноров $f''(x(i))$.

Если $f''(x(i))$ является положительно определенной, то $x(i)$ является точкой локального минимума.

7. Вычисляются угловые миноры матрицы $[-f''(x(i))]$ и анализируются их знаки.

Если $[-f''(x(i))]$ является положительно определенной, то $f''(x(i))$ является отрицательно определенной и $x(i)$ является точкой локального максимума.

В противном случае $f''(x(i))$ является неопределенной и $x(i)$ является седловой точкой.

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных. **Пример.**

У нас есть следующая функция:

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2.$$

1. Находим первые частные производные $f(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2 - 2.$$

2. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_2 - 3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Решением системы уравнения будут следующие точки:

$$x_{(1)} = (-1, 0), \quad x_{(2)} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Таким образом у нас есть две стационарные точки.

3. Находим вторые частные производные $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Составляем матрицу Гессе.
И на основании этой матрицы определяем характер стационарных точек.

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим первую точку $(-1, 0)$;

$$f''(x_{(1)}) = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Угловые
миноры для
данной
матрицы будут:

$$M_1 = |-6| = -6 < 0,$$
$$M_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-6)2 - (-2)(-2) = -16 < 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку все угловые миноры ненулевые, то характер $x(1)$ *определяется с помощью $f''(x)$.*

Поскольку матрица $f''(x(1))$ *не является положительно определенной*, то рассматриваем матрицу $[-f''(x(1))]$:

$$f''(x_{(1)}) = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$



$$-f''(x_{(1)}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Угловые миноры $[-f''(x(1))]$:

$$M_1 = |6| = 6 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6(-2) - 2 \cdot 2 = -16 < 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку матрица $[-f''(x(1))]$ не является положительно определенной, то матрица $f''(x(1))$ не является отрицательно определенной. Следовательно, матрица $f''(x(1))$ является неопределенной и $x(1)$ является **седловой точкой**.

Теперь рассмотрим вторую стационарную точку:

$$x_{(2)} = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Теперь рассчитываем матрицу Гессе:

$$f''(x_{(2)}) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Угловые миноры $f''(x(2))$:

$$M_1 = |10| = 10 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 2 - (-2)(-2) = 16 > 0.$$

Определение точек локальных экстремумов функции многих переменных.

Поскольку все угловые миноры ненулевые, то характер $x(2)$ определяется с помощью $f''(x)$.

Поскольку матрица $f''(x(2))$ является положительно определенной, то $x(2)$ является точкой локального минимума.

Ответ: функция $f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$ имеет в точке $x = (5/3, 8/3)$ локальный минимум.

THANK YOU!

← → ↻ www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html



[Главная](#)

[О нас](#)

[События](#)

[Публикации](#)

[Исследования](#)

[Материалы](#)

[Ссылки](#)

[Контакты](#)

ENGLISH



Новости



Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИНИс в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИНИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радзев).

[Подробнее...](#)

**ЛИНИс – участник Балтийского
партнерства по новым медиа**



Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИНИс).

[Подробнее...](#)

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция