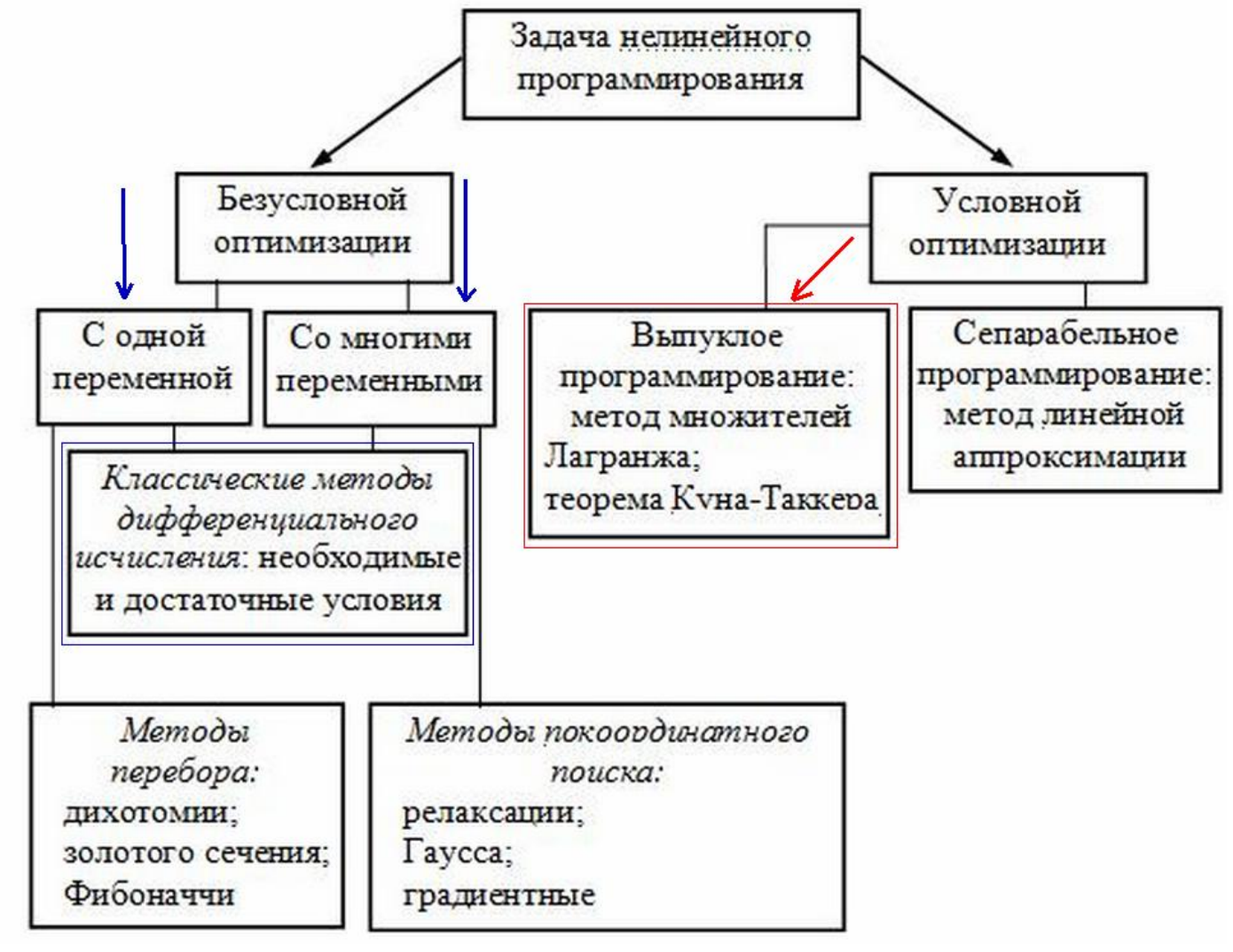
1. Нелинейная задача условной оптимизации.

2. Корреляционный анализ

Кольцов С.Н
2015

www.linis.ru

Классификация задач и методов нелинейного программирования.



ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Данная задача записывается в виде:

$$f(x) \to \min,$$
$$g_i(x) = 0, \ i = \overline{1,m}.$$

Для решения данной задачи используется метод множителей Лагранжа. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум исходной функции *f (x) к задаче на* безусловный экстремум некоторой специально построенной функции Лагранжа *L(x,λ)*

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

Необходимое условие локальной оптимальности (*Теорема Куна-Таккера***).** Пусть f(x), g1(x), g2 (x),..., gm (x) дифференцируемы в точке $x^* \in R$. Если x^*– точка локального экстремума, то существует вектор $\lambda = \lambda^*_1, \lambda^*_2, \lambda^*_3 \ldots \lambda^*_n$, компоненты которого не равны нулю одновременно.

ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

При этом должны выполняться *условия регулярности*: градиенты $g_1'(x^*), g_2'(x^*), \ldots, g_m'(x^*)$ должны быть линейно независимы. Это означает, что ранг матрицы G', строками которой являются градиенты $g_i'(x^*)$, должен быть равен m.

Любая точка x^*, удовлетворяющая при некотором ненулевом λ^* условиям (2.2), называется *стационарной* точкой задачи

Для определения характера стационарных точек используется достаточное условие оптимальности с привлечением матрицы $L'_{x'x}$ (x,λ) вторых частных производных функции Лагранжа по x j , j =1,n (Гессиан).

ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Достаточное условие локальной оптимальности

$f(x)$, $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ дважды дифференцируемы в точке $x^* \in R^n$, причем при некотором $\lambda^* \neq 0$ выполняются условия (2.2), т.е. x^* – стационарная точка. Тогда, если

$$\left\langle \alpha L''_{xx}(x^*, \lambda^*), \alpha \right\rangle > 0 \quad \left(\left\langle \alpha L''_{xx}(x^*, \lambda^*), \alpha \right\rangle < 0 \right)$$

при всех ненулевых $\alpha \in R$ таких, что

$$\left\langle g'_i(x^*), \alpha \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

то x^* – точка локального минимума (максимума) $f(x)$ на множестве X.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов

1. Составляется функция Лагранжа *L(x,λ).*

2. Находим производную: $L'_x(x,\lambda).$

3. Решаем систему:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

В результате вычисляются стационарные точки.

Далее необходимо определить тип стационарных точек.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов

4. Ищем $\langle g_i'(x), \alpha \rangle,$ с целью определения коэффициентов α

5. Находится $L''_{xx}(x_{(l)}, \lambda_{(l)})$ и составляется квадратичная форма.

6. Находится значения коэффициентов α и производится исследование знаков квадратичной формы Q(a) в стационарных точках.

7. Вычисляются значения $Q_l(\alpha_{(r)})$ и анализируются их знаки.

Если $Q_l(\alpha_{(r)}) > 0$ для всех ненулевых $\alpha_{(r)}$, то $x_{(l)}$ – точка условного локального минимума.

Если $Q_l(\alpha_{(r)}) < 0$ для всех ненулевых $\alpha_{(r)}$, то $x_{(l)}$ – точка условного локального максимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов. Пример.

Определить точки локальных экстремумов функции.

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

При условии: $x_1^3 + x_2^3 = 1.$

Решение.

1. Составляем функцию Лагранжа.

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

2. Находим частные производные:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = ax_1 + 3\lambda x_1^2, \qquad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = bx_2 + 3\lambda x_2^2.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + 3\lambda x_1^2 = x_1(a + 3\lambda x_1) = 0, \\ bx_2 + 3\lambda x_2^2 = x_2(b + 3\lambda x_2) = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем три решения:

3.1. Пусть $x_1 = 0$ тогда $x_2 = 1$ Так как $x_2 \neq 0,$

то из второго уравнения следует $b + 3\lambda x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = -b/3$.

Таким образом получаем первую стационарную точку:

$$x_{(1)} = (0,\ 1), \quad \lambda_{(1)} = -b/3.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3.2. Второе решение $x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 1.$

Так как $x_1 \neq 0$ то для удовлетворения второго уравнения должно выполнятся условие:

$$a + 3\lambda x_1 = 0 \longrightarrow \lambda = -a/3.$$

Таким образом получаем вторую стационарную точку:

$$x_{(2)} = (1,\ 0), \quad \lambda_{(2)} = -a/3.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

3.3. Третье решение Пусть x1 ≠ 0 и x2 ≠ 0, тогда из первого уравнения следует:

$$a + 3\lambda x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -a/3x_1$$

Для удовлетворения второго уравнения должно выполнятся условие:

$$b + 3\lambda x_2 = 0$$

Опуская промежуточные выражения, получим третью стационарную точку (нужно получить этот результат самостоятельно):

$$x_{(3)} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}} \right), \quad \lambda_{(3)} = -\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

4. Теперь нужно найти коэффициенты α на основе уравнений $\langle g'(x), \alpha \rangle$:

Вспомним наше ограничение: $x_1^3 + x_2^3 = 1.$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2, \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} = 3x_2^2,$$

Теперь построим квадратичную форму на основе производных функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2} = a + 6\lambda x_1, \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2} = b + 6\lambda x_2,$$

$$L''_{xx}(x,\lambda) = \begin{bmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Для того что бы проанализировать тип стационарных точек, нужно подставить значения точек в квадратичную форму.

Первая стационарная точка $x_{(1)} = (0,\ 1), \quad \lambda_{(1)} = -b/3.$

Рассчитываем матрицу

$$L''_{xx}(x_{(1)}, \lambda_{(1)}) = \begin{bmatrix} a + 6\left(-\frac{b}{3}\right)0 & 0 \\ 0 & b + 6\left(-\frac{b}{3}\right)1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

Нам нужно искать решение в виде квадратичной форме:

$$\alpha L''_{xx}(x_{(1)}, \lambda_{(1)}) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = (a\alpha_1, -b\alpha_2),$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

$$Q_1(\alpha) = \langle (a\alpha_1, -b\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle = a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2.$$

Вспомним, что у нас есть уравнение : $\langle g'(x_{(1)}), \alpha \rangle = 0$

Таким образом, получим: $3 \cdot 0 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot 1 \cdot \alpha_2 = 0 \;\rightarrow\; 3\alpha_2 = 0.$

Решением являются точки: $\alpha_{(r)} = (\alpha_1, 0).$

На основании последнего результата можно определить знак квадратичной формы Q.

$$Q_1(\alpha_{(r)}) = a\alpha_1^2 > 0 \text{ при } \alpha_1 \neq 0\,.$$

Первая стационарная точка это точкой условного локального минимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Вторая стационарная точка: $x_{(2)} = (1,\ 0), \quad \lambda_{(2)} = -a/3.$

Матрицы вторых производных функции Лагранжа:

$$L''_{xx}(x_{(2)}, \lambda_{(2)}) = \begin{bmatrix} a + 6\left(-\frac{a}{3}\right)1 & 0 \\ 0 & b + 6\left(-\frac{a}{3}\right)0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Квадратичная форма:

$$\alpha L''_{xx}(x_{(2)}, \lambda_{(2)}) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = (-a\alpha_1, b\alpha_2),$$

$$Q_2(\alpha) = \langle(-a\alpha_1, b\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2)\rangle = -a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Решаем уравнение для второй стационарной точки: $\langle g'(x_{(2)}), \alpha \rangle = 0$

$$3 \cdot 1 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot 0 \cdot \alpha_2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3\alpha_1 = 0.$$

В итоге получим следующее решение: $\alpha_{(r)} = (0, \alpha_2)$.

Так как у нас получилось, что квадр. Форма >0

$$Q_2(\alpha_{(r)}) = b\alpha_2^2 > 0 \text{ при } \alpha_2 \neq 0.$$

То вторая точка является точкой условного локального минимума.

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Третья стационарная точка:

$$x_{(3)} = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}, \frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \right), \quad \lambda_{(3)} = -\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{3}.$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа.

$L''_{xx}(x_{(3)}, \lambda_{(3)})$:

$$L''_{xx}(x_{(3)}, \lambda_{(3)}) = \begin{bmatrix} a + 6\left(-\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{3}\right)\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} & 0 \\ 0 & b + 6\left(-\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{3}\right)\frac{b}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Алгоритм определения точек условных локальных экстремумов.

Квадратичная форма для третьей точки будет.

$$\alpha L''_{xx}(x_{(3)},\lambda_{(3)}) = (\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = (-a\alpha_1,-b\alpha_2),$$

$$Q_{(3)}(\alpha) = \langle(-a\alpha_1,-b\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle = -a\alpha_1^2 - b\alpha_2^2 = -(a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2).$$

С учетом уравнения $\langle g'(x_{(3)}),\alpha\rangle = 0$)

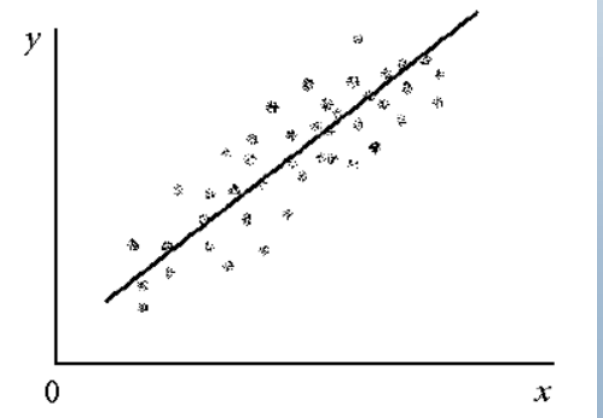
Получим, что третья стационарная точка является точкой локального максимума.

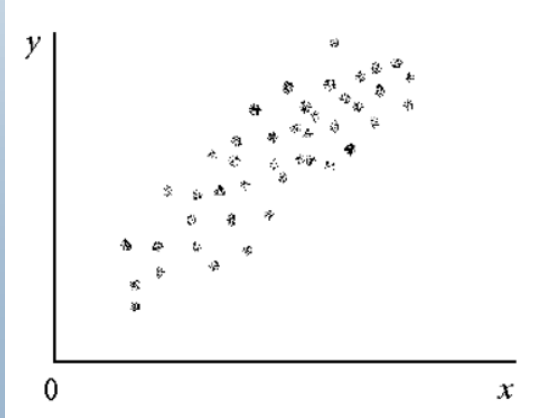
Понятие о корреляции

Величины могут быть либо независимыми, либо связанными функциональной или стохастической (вероятностной) зависимостью.

Функциональная связь: такой вид соотношения между двумя признаками, когда каждому значению одного из них соответствует строго определенное значение другого.

Корреляционная связь такая связь, при которой каждому определенному значению одного признака соответствует несколько значений другого взаимосвязанного с ним признака (связь между ростом и массой тела человека; связь между температурой тела и частотой пульса и др.).

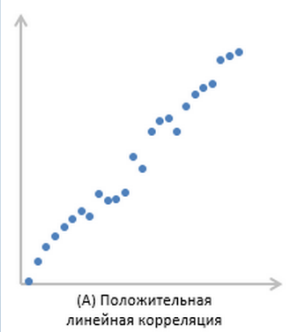


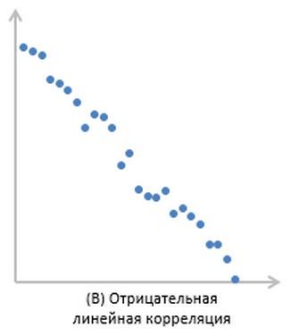


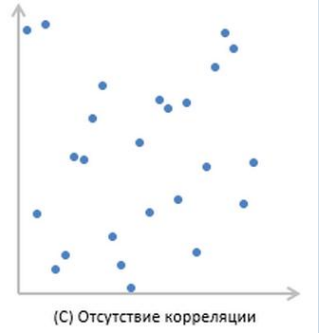
Понятие о корреляции

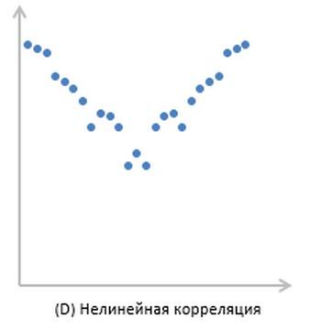
Аналитическая функция, аппроксимирующая (приближенно описывающая) наблюдаемые эмпирические значения, называется функцией регрессии.

Функция регрессии отражает тенденцию изменения одной величины под действием другой и строится таким образом, чтобы эмпирические точки корреляционного поля лежали как можно ближе к ней. Функция регрессии может быть линейной, параболической, гиперболической, логарифмической и др.









Наличие корреляционной зависимости между переменными не всегда означает наличие <u>непосредственной связи этих величин друг с другом</u>

Корреляционная связь, в отличие от функциональной, показывает лишь *тенденцию изменения одной величины под действием другой, следовательно, на* ***основании корреляции можно утверждать лишь о степени связи между переменными, но не о существовании <u>причинно-следственной зависимости между ними.</u>***

Свойства корреляционной связи

А. По силе корреляционной связи:

1) функциональную,
2) тесную (сильную),
3) среднюю (умеренную),
4) слабую и
5) нулевую (отсутствующую) виды связи.

Б. По количеству признаков корреляция может быть парной (между двумя признаками) и множественной (между несколькими признаками).

Коэффициент корреляции представляет собой безразмерную величину, изменяющуюся в пределах от –1 до 1.

- $\eta = 1$ – величины связаны функциональной зависимостью;
- $0{,}95 \le \eta < 1$ – связь очень сильная, практически функциональная;
- $0{,}75 \le \eta < 0{,}95$ – связь тесная (сильная);
- $0{,}5 \le \eta < 0{,}75$ – связь средняя (умеренная);
- $0{,}2 \le \eta < 0{,}5$ – связь слабая;
- $0 \le \eta < 0{,}2$ – практически нет связи.

Коэффициент корреляции Пирсона

Модуль коэффициента корреляции характеризует силу статистической связи, чем больше |r |, тем сильнее связь, в частности если r = ±1, то связь функциональная, если r близок к нулю, то связь слабая или отсутствует.

Знак коэффициента корреляции характеризует направление статистической связи, если r > 0, то с ростом X показатель Y также растет, если r < 0 , то с ростом X показатель Y убывает.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right]}}$$

Если число наблюдений меньше 100 штук то коэффициент корректируется следующим образом:

$$r' = r \cdot \left[1 + \frac{1 - r^2}{2(n-3)}\right]$$

где x_i ,y_i наблюдения,

$\bar{x}, \bar{y}$ – средние значения,

n – число наблюдений.

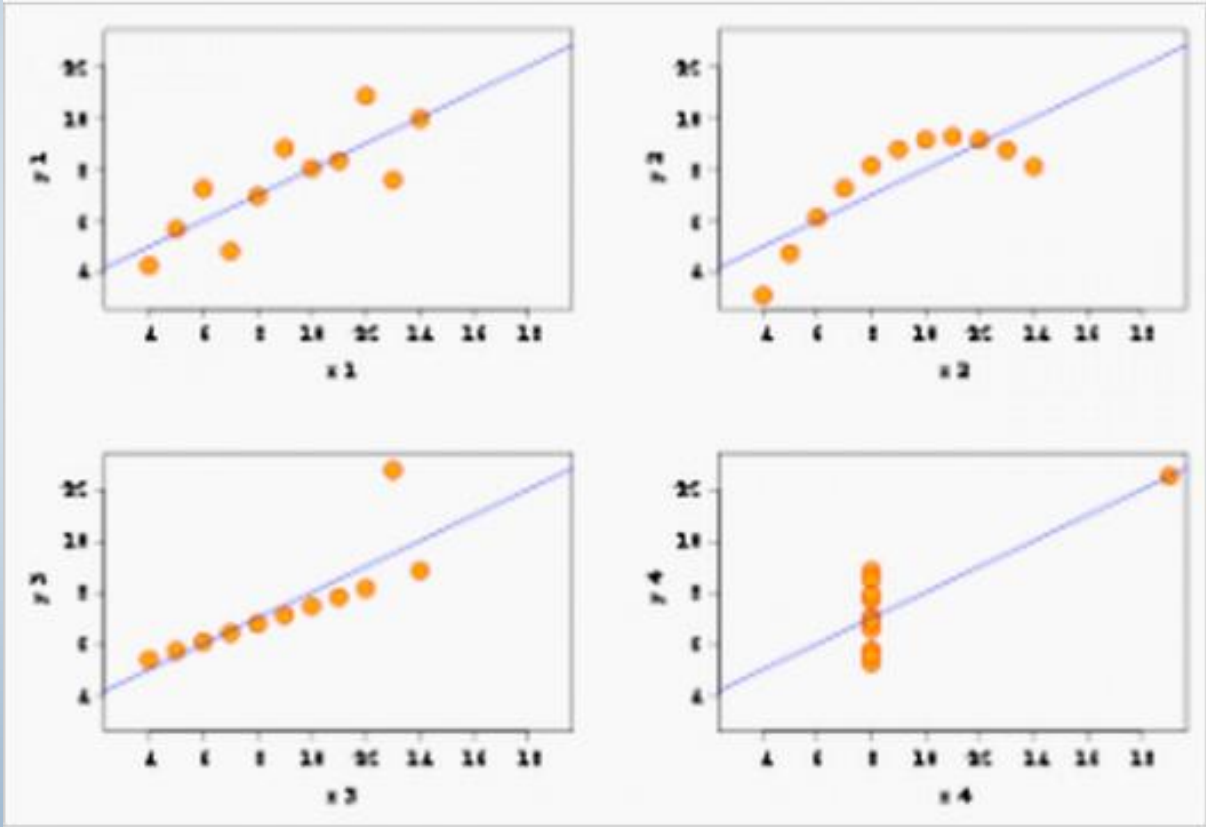
Величина $R = r^2$ называется коэффициентом детерминации, его можно интерпретировать как среднюю долю влияния показателя X на Y.

Расчет коэффициента корреляции Пирсона предполагает, что переменные X и Y распределены нормально.

Коэффициент корреляции Пирсона

Недостатки линейного коэффициента корреляции Пирсона

1. Неустойчивость к выбросам.
2. С помощью коэффициента корреляции Пирсона можно определить только силу линейной взаимосвязи между переменными, другие виды взаимосвязей выявляются методами регрессионного анализа.



Четыре различных набора данных, коэффициент корреляции на которых равен 0.81

INTERNET STUDIES LAB

HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
SAINT PETERSBURG

THANK YOU!

www.linis.hse.spb.ru/index.php/glavnaja.html

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

ЛИНИС ЛАБОРАТОРИЯ ИНТЕРНЕТ-ИССЛЕДОВАНИЙ

- Главная
- О нас
- События
- Публикации
- Исследования
- Материалы
- Ссылки
- Контакты

ENGLISH

Новости

Чем дышит блогосфера? Семинар ЛИнИс в Москве

11:54 27.04.2012

24 апреля команда ЛИнИс провела в НИУ-ВШЭ (Москва) семинар на тему "Чем дышит блогосфера? Методы анализа больших массивов Интернет-данных для социологических задач". Выступление прошло в рамках академического семинара по социологической теории и методологии кафедры анализа социальных институтов (рук. Инна Девятко), который на этот раз проходил совместно с Лабораторией экономико-социологических исследований (рук. В.Радаев).

Подробнее...

ЛИнИс – участник Балтийского партнерства по новым медиа

Анонсы

11.05.2012 (Пятница)

Презентация Лаборатории Интернет-Исследований

11 мая в 17-00 состоится презентация новой исследовательской площадки Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Санкт-Петербург) - Лаборатории интернет-исследований (ЛИнИс).

Подробнее...

26.09.2012 (Среда)

Новые СМИ: меняющийся медийный ландшафт

27-28 сентября 2012 года лаборатория интернет-исследований совместно с зарубежными партнерами проводит конференцию "New media: changing media landscapes". Конференция